T.K.大数学 2014

		H	尼	総
1	整数	A	A	A
2	多変数	B	B	B
3	行列			
4	基礎	B	A	A
5	関数	B	B	B

第 1 問

[解] 題意から. $n=2m+1$ $(m\in\mathbb{N})$ とおける。

$$\begin{cases} a_n=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)k(k-1)=\frac{1}{24}(n+1)n(n-1)(n-2) \\ b_n=\frac{(n+1)(n-1)}{8}=\frac{1}{2}m(m+1) \end{cases} \cdots ①$$

となる.

(1) ①で.. $(n+1)n(n-1)(n-2)$ は連続4セイスウの積だから、$4!=24$ でわり切れるので:

$a_n\in\mathbb{Z}$ 囲。又 $m(m+1)$ も連続2セイスウの積だから. $2!=2$ でわり切れるので:

$b_n\in\mathbb{Z}$ 囲

(2) $a_n=\frac{1}{24}(2m+2)(2m+1)\cdot 2m(2m-1)=\frac{(2m+1)(2m-1)(m+1)\cdot m}{6}$ だから.

$$a_n-b_n=m(m+1)\left[\frac{(2m+1)(2m-1)}{6}-\frac{1}{2}\right]$$

$$=\frac{m(m+1)}{6}4(m+1)\cdot(m-1)$$

$$=\frac{2}{3}(m+1)(m+1)m(m-1)$$

$(m+1)\cdot m(m-1)$ が(1)と同じく $3!=6$ でわり切れるので: $A\in\mathbb{Z}$ として

$$a_n=4(m+1)A\in\mathbb{Z}\ 囲$$

となる。

$(a-1)x$

第 2 問

［解］

(1) $a=2$の時. $t>0$から

$$(*) \iff e^t - e^{\frac{t}{2}}\cdot t - 1 \geqq 0. \quad \cdots ①$$

この左辺 $f(t)$とおく。

$$f'(t) = e^t - e^{\frac{t}{2}}\left(1+\frac{t}{2}\right)$$

$$= e^{\frac{t}{2}}\left(e^{\frac{t}{2}} - \left(\frac{t}{2}+1\right)\right) > 0 \quad (\because t>0)$$

から $f(t)$は単調増加で. $0<t$の時

$$f(t) > f(0) = 0 \quad ■$$

となる。

(2) $g(t) = e^t - e^{\frac{t}{a}}\cdot t - 1$ とおく。$t>0$で $g(t)>0$であることを示せば良い。又 $x=\frac{t}{a}$ とおく。

$$g'(t) = e^t - e^{\frac{t}{a}}\left(1+\frac{t}{a}\right) = e^{ax} - e^x(1+x)$$

$$= e^x\left[e^{(a-1)x} - (x+1)\right] \quad \cdots ②$$

したがって. $a\geqq 2$の時 $g'(t)>0$となり. $g(t)$は単調増加だから $t>0$に対して

$g(t) > g(0) = 0$ となる. $\cdots ③$

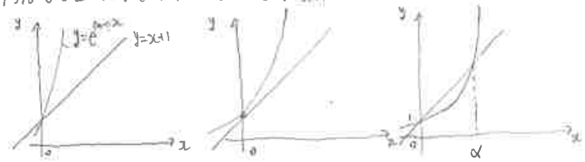
一方. $1<a<2$の時. $0<x<\alpha$で $g'(t)<0$となるようなαが存在し. 下表をうる。

t	0		$a\alpha$	
g'		$-$		
g	0	↘		

したがって. $g(t)<0$となるtが存在し不適 $\cdots ④$

以上③.④から. 求める条件は $a\geqq 2$ である。

※ ②について. $y=e^x$の$x=0$の接線は$y=x+1$であり. $\left(e^{(a-1)x}\right)' = (a-1)\cdot e^{(a-1)x} \geqq a-1$ だから.
グラフは aと2の大小で以下のようになる。($\frac{e^{(a-1)x}}{x+1} \xrightarrow{x\to\infty} +\infty$)



$(a>2)$ $(a=2)$ $(1<a<2)$

第　　問

第 4 問

[解] (1) 題意から.

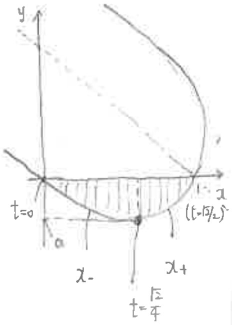
$$(x+yi) = \left(\cos\left(t\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(t\frac{\pi}{4}\right)\right)(t+si)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(t+si)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{(t-s)+i(t+s)\right\}$$

$x, y, s, t \in \mathbb{R}$ から.

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(t-s) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-\sqrt{2}t^2+3t) \quad (\equiv f(t)) \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(s+t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}t^2-t) \quad (\equiv g(t)) \end{cases}$$

(2) $g(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sqrt{2}\left(t-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2-\frac{\sqrt{2}}{8}\right]$ だから. $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{8} = -\frac{1}{8}$ $\left(t=\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

(3) $g(t)=0 \Leftrightarrow t=0, \frac{\sqrt{2}}{2}$ で (2)とあわせてグラフは右図



図のように x_+, x_- をおくと, もとめる体積 V として

$$\frac{1}{\pi}V = \int_a^0 (x_+^2-x_-^2)\,dy$$
$$= \int_{\frac{\sqrt{2}}{4}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x_+^2\frac{dy}{dt}dt - \int_{\sqrt{2}/4}^{0} x_-^2\frac{dy}{dt}dt$$
$$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x^2\frac{dy}{dt}dt \quad \cdots ①$$

である。(1)から

$$g'(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(2\sqrt{2}t-1)$$

だから.

$$x^2\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}(-\sqrt{2}t^2+3t)^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(2\sqrt{2}t-1)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4}t^2(-\sqrt{2}t+3)^2(2\sqrt{2}t-1)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4}t^2(4\sqrt{2}t^3-26t^2+24\sqrt{2}t-9)$$

なので ①に代入して

$$\frac{1}{\pi}V = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\frac{4\sqrt{2}}{6}t^6-\frac{26}{5}t^5+\frac{24\sqrt{2}}{4}t^4-\frac{9}{3}t^3\right]_0^{\sqrt{2}/2}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\left[\frac{4\sqrt{2}}{6}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3-\frac{26}{5}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+6\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-3\right]$$
$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{3}-\frac{13}{5}+6-3\right]$$
$$= \frac{11}{120}$$

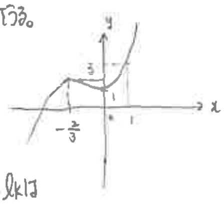
だから.

$$V = \frac{11}{120}\pi$$

第 5 問

【解】$f(x)=x^3+x^2+1$ とおく。$f'(x)=3x^2+2x$ から下表になる。

x		$-\frac{2}{3}$		0	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	↗	$\frac{31}{27}$	↘	1	↗



グラフは右図。又、点 $(x_k, f(x_k))$ における C の接線 l_k は

$$l_k : y=g_k(x)=(3x_k^2+2x_k)x-2x_k^3-x_k^2+1$$

であるから、C と l_k の交点の x 座標のうち $x\neq x_k$ のものは

$$f(x)=g_k(x)$$

$$x^3+x^2-(3x_k^2+2x_k)x+x_k^2(2x_k+1)=0$$

$$\therefore x=-(2x_k+1) \quad (x_0=1 \text{ から帰納的に } x_k\neq-(2x_k+1))$$

である。よって、

$$x_{k+1}=-(2x_k+1) \quad \cdots ①$$

となる。したがって、

$$S_k=\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k}\{f(x)-g_k(x)\}dx\right|$$

$$=\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x-x_k)(x-x_{k-1})^2dx\right|$$

$$=\frac{1}{12}(x_k-x_{k-1})^4 \quad \cdots ②$$

となる。

(1) $x_0=1$ から、①より、$x_1=-3$ だから、②に代入して

$$S_1=\frac{4^4}{12}=\frac{4^3}{3} \ /\!/$$

(2) ①から

$$x_{k+1}+\frac{1}{3}=-2\left(x_k+\frac{1}{3}\right)$$

だから、くり返し用いて、$x_0=1$ とあわせて、

$$x_k=(-2)^k\left(1+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\{(-2)^{k+2}-1\} \ /\!/$$

(3) (2)、及び②から

$$S_k=\frac{1}{12}\left[\frac{1}{3}\{(-2)^{k+2}-1\}-\frac{1}{3}\{(-2)^{k+1}-1\}\right]^4$$

$$=\frac{1}{3^4\cdot 12}\left((-2)^{k+2}-(-2)^{k+1}\right)^4$$

$$=\frac{1}{12}(-2)^{4(k+1)}$$

$$=\frac{4}{3}\cdot 2^{4k}$$

だから、

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4k}$$

$$=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{4n}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^4}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^4}=\frac{1}{20} \ /\!/$$