T.K.大数学 2013

		計	思	統
1	基本	A	A	A
2	行列			
3	関数	A	A	A
4	多変数	B	B	B
5	多変数	B	B	B

第 1 問

[解] (1) $a_n=\alpha^n+\beta^n-3^n$ とおく。又. $b_n=\alpha^n+\beta^n$ とする。

$$\begin{cases}\alpha+\beta=3\\ \alpha\beta=5\end{cases}$$

から.

$$b_{n+2}=(\alpha+\beta)b_{n+1}-\alpha\beta b_n=3b_{n+1}-5b_n \quad \cdots ①$$

である。以下合同式の法を5とし. $a_n\equiv 0$ …◇ であることを帰納的に示す.

1° $n=1.2$

$b_1=3$. $b_2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=-1$ から.

$$a_1=0\equiv 0,\quad a_2=-1-9\equiv -10\equiv 0$$

となり.◇は成立。

2° $n=k.k+1$ $(k\in \mathbb{N})$ での成立を仮定

$$\begin{aligned}a_{n+2}&=b_{n+2}-3^{n+2}\\&=3b_{n+1}-5b_n-3^{n+2}\\&=3(a_{n+1}+3^{n+1})-5(a_n+3^n)-3^{n+2}\\&=3a_{n+1}-5a_n-5\cdot 3^n\equiv 0 \quad (\because 仮定)\end{aligned}$$

から. $n=k+2$ でも◇は成立。

以上から示された■

(2) 4つの目を a.b.c.d とすると. 以下のパターンがある。

$$\begin{cases}1^\circ\ a.b.c.d.d.d\\ 2^\circ.\ a.b.c.c.d.d\end{cases}$$

6コのサイコロを全て区別する. 全事象は 6^6 通りで同様にたしからしい。

1°の時

a〜dのえらび方が: $4\cdot {}_6C_4=60$ 通り。各々のパターンについて. ${}_6C_3\cdot 3!=120$ 通りある

から.

$$60\times 120=2\cdot 6^2\cdot 100 \text{ 通り}.$$

2°の時

a〜dのえらび方が ${}_4C_2\cdot {}_6C_4=90$ 通り。各々のパターンについて. ${}_6C_2\cdot {}_4C_2\cdot 2!=180$ 通り

あるから

$$90\times 180=2\cdot 9^2\cdot 100 \text{ 通り}$$

以上から

$$\frac{2\cdot 6^2+2\cdot 9^2}{6^6}100=\frac{325}{648}_{//}$$

第 2 問

[解]

第 3 問

[解] $f(x)=e^{x}-x^{e}$ とおく。$f'(x)=e^{x}-e\cdot x^{e-1}$ であり $x>0$ の時、

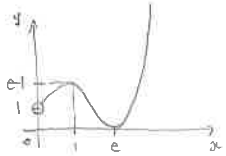
$f'(x)\geqq 0 \Leftrightarrow e^{x}\geqq e\cdot x^{e-1} \Leftrightarrow x\geqq 1+(e-1)\log x$ （自然対数をとった）…①

となる。$g(x)=x-1-(e-1)\log x$ とおくと $g'(x)=1-\frac{e-1}{x}$ であり、下表をうる。

x	0		1		$e-1$		e	
g'		$-$	$-$	$-$	0	$+$		$+$
g	$+\infty$	↘	0	↘		↗	0	↗

したがって下表をうる。

x	0		1		e		∞
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	(1)	↗	$e-1$	↘	0	↗	$+\infty$

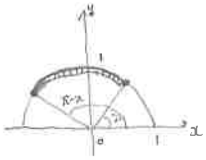


よって $y=f(x)$ のグラフは右図で、もとめる解の数は、

$k<0$ … 0コ
$k=0$ … 1コ
$0<k\leqq 1$ … 2コ
$1<k<e-1$ … 3コ
$k=e-1$ … 2コ
$e-1<k$ … 1コ

$e-1$

第 4 問



[解] $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ …① の時、$0 \leq 4nx \leq 2n\pi$ であり、

$\sin 4nx \geq \sin x$ なる条件は、$k \in \mathbb{Z}$ として、

$$2k\pi + x \leq 4nx \leq 2k\pi + (\pi - x)$$

$$\frac{2k\pi}{4n-1} \leq x \leq \frac{(2k+1)\pi}{4n+1} \quad \cdots ②$$

である。②の区間を D_k とおく。x の存在条件から、$\frac{2k\pi}{4n-1} \leq \frac{(2k+1)\pi}{4n+1}$ ∴ $k \leq n - \frac{1}{4}$ である。

さらに、$k = 0, 1, \cdots, n-1$ の時 D_k は①に含まれ、他の時には D_k は①に含まれないので、

D_k の長さを l_k として

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} l_k \quad \cdots ③$$

である。②から

$$l_k = \left(\frac{2k+1}{4n+1} - \frac{2k}{4n-1}\right)\pi = \frac{4n-4k-4}{(4n+1)(4n-1)}\pi = \frac{4(n-1-k)}{(4n+1)(4n-1)}\pi$$

だから、

$$\sum_{k=0}^{n-1} l_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{4k\pi}{(4n+1)(4n-1)} = \frac{\pi}{(4n+1)(4n-1)} 2n(n-1) = \frac{2(1-1/n)\pi}{(4+1/n)(4-1/n)} \to \frac{\pi}{8}$$

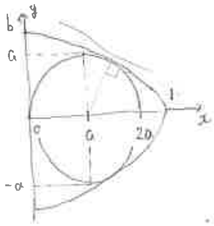
となるので、③から

$$S_n \longrightarrow \frac{\pi}{8}$$

//

第 5 問

[解] $c=\cos x, s=\sin x$ とする。C_2上の点$P(c, bs)$とおく。又$A(a, 0)$とする。



(1) $\min \overline{AP} = (C_1\text{の半径}) = a$ ···① であることが必要。

$$\overline{AP}^2 = (c-a)^2 + b^2s^2$$

$$= (1-b^2)c^2 - 2ac + (a^2+b^2) \equiv f(c)$$

とおく。C_1とC_2は明らかに$x \geq 0$で接するので($\because a>0$)

$0 \leq c \leq 1$でかんがえる。

$$f'(c) = 2(1-b^2)c - 2a$$

で、$f'(0) = -2a < 0$より、$f'(1) = 2(1-a-b^2)$の正負で場合分け。

1° $f'(1) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq a+b^2$

$f'(c)$は高々cの1次関数であるから、区間内で$f'(c) \leq 0$、つまり

$f(c)$は単調減少で

$$\min f(c) = f(1) = (1-a)^2.$$

2° $f'(1) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq a+b^2$

この時 $1-b^2 \geq a > 0$ だから $f(c)$はcの2次関数で、下表をうる。

c	0		$\frac{a}{1-b^2}$		1
f'		$-$	0	$+$	
f		↘		↗	

したがって、$\min f(c) = f\left(\frac{a}{1-b^2}\right) = \frac{a^2}{1-b^2} - \frac{2a^2}{1-b^2} + (a^2+b^2) = (a^2+b^2) - \frac{a^2}{1-b^2}$

したがって、①なる条件は、

$$\begin{cases} 1 \leq a+b^2\text{の時、} (1-a)^2 = a^2 \quad \therefore a = \frac{1}{2} \\ 1 \geq a+b^2\text{の時} \quad b^2 - \frac{a^2}{1-b^2} = 0 \quad \therefore a^2 = b^2(1-b^2) \end{cases}$$

この時いずれもC_1がC_2の内側にあり、十分である。よって、これをせいりして

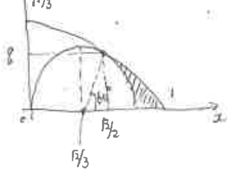
$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \wedge \frac{1}{2} \leq b^2 \quad (\text{接点}(1, 0)) & \cdots ⑦ \\ b^2 \leq \frac{1}{2} \wedge a^2 = b^2(1-b^2) \quad \left(\text{接点は}c = \frac{a}{1-b^2}\text{となる点}\right) & \cdots ④ \end{cases}$$

(2) $b = \frac{\sqrt{3}}{3}$の時、④に含まれる。よってこの時、$a = \frac{\sqrt{2}}{3}$となるから、

$$p = c = \frac{a}{1-b^2} = \frac{\sqrt{2}/3}{1-1/3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

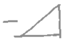
$$q = bs = b \cdot \sqrt{1-c^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{6} \quad (\because \text{第1象限にあるので} q>0)$$

(3) 図は右のようになる。右図斜線部の面積T'、もとめる面積Tとして



$$T = 2T' \qquad \cdots ②$$

となる。ここで、

$T' =$  $-$  $-$  ···③

となり、各項計算すると、

 $= \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{3}}{24}\pi$

 $= \frac{1}{2} \cdot p \cdot q = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{12}$

 $=$  $-$  $= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} \cdot a^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{\pi}{27} - \frac{\sqrt{3}}{36}$

だから、③に代入して

$$T' = \frac{\sqrt{3}}{24}\pi - \frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{\pi}{27} + \frac{\sqrt{3}}{36}$$

$$= \left(\frac{\pi}{24} - \frac{1}{18}\right)\sqrt{3} - \frac{\pi}{27}$$

だから②に代入して

$$T = \left(\frac{\pi}{12} - \frac{1}{9}\right)\sqrt{3} - \frac{2}{27}\pi$$