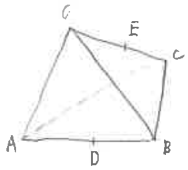
T.K.大数学　2012

激ヌル

		計	思	総
1	基本	A	A	A
2	基本	A	A	A
3	多変数	B	A	B
4	数列	A	A	A
5	行列			
6	空間	B	B	B



[解] (1) 点Xに対し $\overrightarrow{OX}=\vec{x}$ とする。

$$\begin{cases} \overrightarrow{AC} = \vec{c}-\vec{a} \\ \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}) \end{cases}$$

から、

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\left\{|\vec{c}-\vec{a}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{a}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}$$ //

(2) 排反事象を考える。10の倍数にならないのは、

A: 3回とも 1,3のみ

B: 3回とも 2の倍数がでない

C: 3回とも 5 〃

とすると B∪C の時である。

$P(A) = \left(\frac{2}{6}\right)^3$, $P(B) = \left(\frac{3}{6}\right)^3$, $P(C) = \left(\frac{5}{6}\right)^3$

から、包除定理から、

$$P(B\cup C) = P(B)+P(C)-P(B\cap C)$$

$$= P(B)+P(C)-P(A)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{5}{6}\right)^3-\left(\frac{1}{3}\right)^3$$

だから もとめる確率は

$$P(\overline{B\cup C}) = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{5}{6}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$= \frac{1}{3}$$ //

[解2] (2)

1° 5の倍1つ, 2の倍1つ, 残りが1か3

2° 5の倍2つ, 2の倍1つ

3° 5の倍1つ, 2の倍2つ

を考えれば良い。

1° … $3!\cdot 1\cdot 3\cdot 2 = 36$

2° … ${}_3C_1\cdot 3\cdot 1 = 9$

3° … ${}_3C_1\cdot 1\cdot 3 = 27$

で、あわせて72通りだから、

$$\frac{72}{6^3} = \frac{1}{3}$$ //

第 2 問

[解] (1) $A=\sum_{n=0}^{99}3^n$ とおく。

$$A=\frac{3^{100}-1}{3-1}=\frac{1}{2}(3^{100}-1)$$

$$A=\frac{3^{100}}{2}-\frac{1}{2} \quad \cdots ①$$

だから、$\frac{3^{100}}{2}=10^{l}$ ($l\in\mathbb{Z}$) の形で書けないことから、Aのケタ数は $B=\frac{3^{100}}{2}$ のケタ数と同じである。Bがmケタだとすると、

$$10^{m-1}\leq B<10^{m}$$

常用対数とって (∵各辺正)

$$m-1\leq 47.71-\log_{10}2<m \quad \cdots ②$$

$\log_{10}x$ は x の単調増加関数だから、$\log_{10}1<\log_{10}2<\log_{10}3$ であることから、②をみたすのは $m=48$、つまりAは48ケタである。

[解2]

$0.4771<0.71<0.4771\times 2=\log 9$ の両辺に47を足して、

$$\log_{10}10^{47}+\log_{10}3<47.71<\log_{10}40^{47}+\log 9$$

$$3\cdot 10^{47}<3^{100}<9\cdot 10^{47} \quad (\because \log_{10}x は単調増加)$$

だから、

$$\frac{3}{2}\cdot 10^{47}-\frac{1}{2}<A<\frac{9}{2}\cdot 10^{47}-\frac{1}{2}$$

より、Aは48ケタである。

(2) $m^2\leq n<(m+1)^2$ ($m\in\mathbb{N}$) の時、$m\leq\sqrt{n}<m+1$ から、

$[\sqrt{n}]=m$ となる。したがってこの時、nがmで割り切れるのは

$$\begin{cases} m=1の時、n=1,2,3 & の3つ \\ m\geq 2の時、n=m^2, m(m+1), m(m+2) & の3つ \end{cases}$$

である。さらに $10000=(100)^2$ だから、$n=10000$ も条件をみたすので

$$\sum_{m=1}^{99}3+1=298コ$$

[解] $f(x)=x^3-3x^2+2x$ とおく。$f'(x)=3x^2-6x+2$ となる。

(1) $x \neq 0$ とすると.

$$f(x)=ax \Leftrightarrow x^2-3x+2=a \quad \cdots ①$$

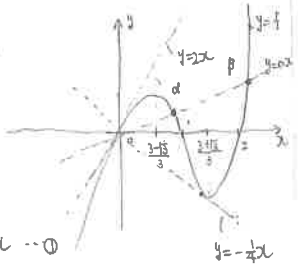
である。①が実解を持てば良く, (左辺) $=(x-\frac{3}{2})^2-\frac{1}{4}$ だから.

$$a \geq -\frac{1}{4}$$

(2) ①の重解を含む2解を α, β ($\alpha \leq \beta$) とする。

右図から. $2 \leq a$ の時. $S(a)$ は単調に増加するので.

$-\frac{1}{4} \leq a \leq 2 \cdots ①$ で考えれば良い。この時.



$g(x)=x^3-3x^2+2x-ax$ とすると.

$$S(a)=\int_0^\alpha g(x)dx-\int_\alpha^\beta g(x)dx$$

$$=\int_0^\alpha f(x)dx-\int_0^\alpha ax\,dx-\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_\alpha^\beta ax\,dx \quad \cdots ①$$

となる.

$$\frac{d}{da}\int_0^\alpha f(x)dx=f(\alpha)\cdot\alpha'=a\alpha\cdot\alpha'$$

$$\frac{d}{da}\int_\alpha^\beta f(x)dx=f(\beta)\cdot\beta'-f(\alpha)\cdot\alpha'=a(\beta\cdot\beta'-\alpha\cdot\alpha')$$

$$\frac{d}{da}\int_0^\alpha ax\,dx=\int_0^\alpha x\,dx+a\alpha\cdot\alpha'=\frac{1}{2}\alpha^2+a\alpha\alpha'$$

$$\frac{d}{da}\int_\alpha^\beta ax\,dx=\int_\alpha^\beta x\,dx+a(\beta\beta'-\alpha\cdot\alpha')$$

だから.①の両辺 a で微分して.

$$S'(a)=a\cdot\alpha\cdot\alpha'-a\cdot\alpha\cdot\alpha'-\int_0^\alpha x\,dx-a(\beta\beta'-\alpha\alpha')+\int_\alpha^\beta x\,dx+a(\beta\cdot\beta'-\alpha\cdot\alpha')$$

$$=\int_\alpha^\beta x\,dx-\int_0^\alpha x\,dx=\frac{1}{2}\beta^2-\alpha^2=\frac{1}{2}(\beta+\sqrt{2}\alpha)(\beta-\sqrt{2}\alpha) \quad \cdots ②$$

ここで. α, β は①の2解で, ①の時 $0 \leq \alpha \leq \beta$ だから. $\beta+\sqrt{2}\alpha>0$ である。又.

$$\alpha=\frac{3-\sqrt{4a+1}}{2}, \quad \beta=\frac{3+\sqrt{4a+1}}{2}$$

なので. $A=\sqrt{4a+1}$ として.

$$\beta-\sqrt{2}\alpha=\frac{1}{2}\left[(3+A)-\sqrt{2}(3-A)\right]=\frac{1+\sqrt{2}}{2}\left(A-3(3-2\sqrt{2})\right)$$

だから下表をうる。(∵ A は a の単調増加関数)

a	$-\frac{1}{4}$		$38-27\sqrt{2}$		0
A			$3(3-2\sqrt{2})$		
S'		−	0	+	
S		↘		↗	

したがって $S(a)$ は $a=38-27\sqrt{2}$ で min をとる。

第 4 問

[解] $\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{n(n+1)} \\ a_{k+1} = -\dfrac{1}{k+n+1} + \dfrac{n}{k}\displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i \end{cases}$ …①

(1) ①から

$$a_2 = -\frac{1}{n+2} + \frac{n}{1}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} //$$

$$a_3 = -\frac{1}{n+3} + \frac{n}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

$$= \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} = \frac{1}{(n+2)(n+3)} //$$

(2) $a_k = \dfrac{1}{(n+k-1)(n+k)}$ …◇ であることを帰納的に示す。$S_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i$ とおく。①から、$k=1$では成立するので、以下 $k \leq m$ $(m \in \mathbb{N})$ なる全てのkでの◇の成立を仮定する。①から

$$a_{m+1} = -\frac{1}{n+m+1} + \frac{n}{m}\left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m}\right\}$$

$$= -\frac{1}{n+m+1} + \frac{n}{m}\frac{m}{n(n+m)}$$

$$= \frac{1}{(n+m)(n+m+1)}$$

から、$k=m+1$でも◇は成立。よって示された。■

従って、$a_k = \dfrac{1}{(n+k)(n+k-1)} //$

(3) $\dfrac{1}{(n+k)^2} < a_k < \dfrac{1}{(n+k-1)^2}$ だから

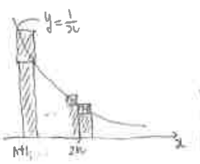
$$\frac{1}{n+k} < a_k < \frac{1}{n+k-1}$$

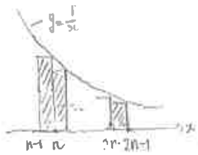
kについて和をとって、

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} < b_n < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k-1} \quad \cdots ①$$

ここで、右図の面積を比較して

$$\begin{cases} \circ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \geq \int_{n+1}^{2n} \frac{1}{x}dx = \log\frac{2n}{n+1} \\ \circ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k-1} \leq \int_{n-1}^{2n} \frac{1}{x}dx = \log\frac{2n}{n-1} \end{cases} \quad \cdots ②$$





であり、$n \to \infty$ の時

$$\log\frac{2n}{n\pm1} = \log 2 - \log\frac{1}{1\pm\frac{1}{n}} \longrightarrow \log 2$$

だから、①②及びはさみうちから

$$b_n \longrightarrow \log 2 //$$

[解2] (3) ①以下、

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \log 2$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \log 2$$

から、はさみうちより

$$b_n \longrightarrow \log 2 //$$

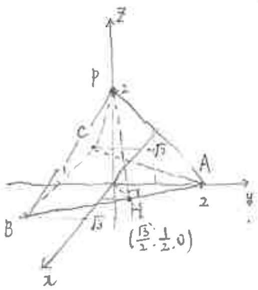
第 5 問

第 6 問

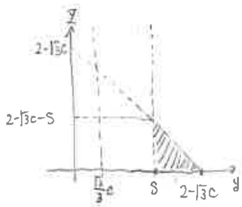
[解] Pから AB へ下ろした垂線の足を H とする。対称性から四面体 P−OAH の $x^2+y^2 \geqq 1$ をみたす部分の体積 V', もとめる体積 V として

$$V = 6V' \quad \cdots ①$$

である。$x = \cos\theta$ $\left(\frac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ で切断すると右下図のようになる。又 以下 $S = \sin\theta$, $C = \cos\theta$ とする。斜線部の面積 $T(\theta)$ とすると



$$T(\theta) = \frac{1}{2}(2-\sqrt{3}C-S)(2-\sqrt{3}C-S)$$
$$= \frac{1}{2}(2-\sqrt{3}C-S)^2$$



だから

$$V' = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} T(\theta)\,dx$$
$$= \int_{\pi/2}^{\pi/6} T(\theta) \cdot \frac{dx}{d\theta}\,d\theta$$
$$= \int_{\pi/2}^{\pi/6} \frac{1}{2}(2-\sqrt{3}C-S)^2 \cdot (-S)\,d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2} \left\{S^3 + 2S^2(\sqrt{3}C-2) + (\sqrt{3}C-2)^2 \cdot S\right\} d\theta \quad \cdots ③$$

各項計算して

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} S^3\,d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{-\sin 3\theta + 3S}{4}\,d\theta = \frac{1}{4}\left[+\frac{1}{3}\cos 3\theta - 3C\right]_{\pi/6}^{\pi/2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{3} = \frac{3}{8}\sqrt{3}$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} 2\sqrt{3}S^2C\,d\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left[S^3\right]_{\pi/6}^{\pi/2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(1-\frac{1}{8}\right) = \frac{7}{12}\sqrt{3}$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} -4S^2\,d\theta = -4\cdot\frac{1}{2}\left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\pi/6}^{\pi/2} = -2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} (\sqrt{3}C-2)^2 S\,d\theta = -\left[\frac{1}{3\sqrt{3}}(\sqrt{3}C-2)^3\right]_{\pi/6}^{\pi/2} = -\frac{1}{3\sqrt{3}}\left\{(-2)^3 - \left(-\frac{1}{2}\right)^3\right\} = \frac{7}{8}\sqrt{3}$$

だから ③ に代入して

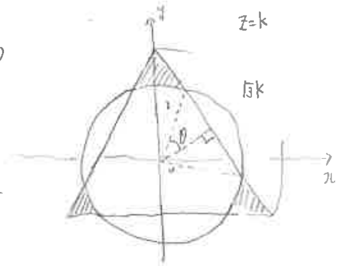
$$2V' = \frac{3}{8}\sqrt{3} + \frac{7}{12}\sqrt{3} - 2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{7}{8}\sqrt{3}$$
$$= \left(\frac{3}{8} + \frac{7}{12} - \frac{1}{2} + \frac{7}{8}\right)\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi$$
$$= \frac{4}{3}\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi$$

から ① に代入して

$$V = 3\left(\frac{4}{3}\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi\right) = 4\sqrt{3} - 2\pi \quad /\!/$$

[解2] $z = 2-k$ $(1 \leqq k \leqq 2)$ で切断する。

この時、四面体の切断面は、一辺 $\sqrt{3}k$ の正三角形である。右のように θ をおくと、



$$\cos\theta = \frac{1}{2}k \quad \cdots ①$$

であり、斜線部の面積 $S(k)$ として、

$$S(k) = \frac{3}{4}\sqrt{3}k^2 - \pi + 3\theta - 3SC$$

だから 求める体積 V として

$$V = \int_0^1 S(k)\,dz$$
$$= \int_2^1 S(k)\frac{dz}{dk}\,dk$$
$$= \int_1^2 S(k)\,dk$$
$$= \int_{\pi/3}^{0} S(k)\cdot 2(-S)\,d\theta \quad (\because ①)$$
$$= 2\int_0^{\pi/3} (3\sqrt{3}C^2 + 3\theta - 3SC - \pi)S\,d\theta$$

で、各項計算すると、

$$V = 4\sqrt{3} - 2\pi \quad /\!/$$