T. K. 大数学 2011

第1問

第 2 問

[解] $g(t)=\cos t-x\sin 2t$ とおく。$0\le t\le \pi/2$ において $\cos t\ge 0$ だから.

$$g(t)=\cos t\,(1-2x\sin t)$$

よって

$x\le\frac{1}{2}$ の時, $g(t)\ge 0$

$\frac{1}{2}<x$ の時, $0<t<\pi/2$ に $g(\alpha)=0$ なる α がただ1つ存在し,

$$\begin{cases} 0\le t\le\alpha \text{ の時 } g(t)\ge 0 \\ \alpha\le t\le \pi/2 \text{ の時 } g(t)\le 0 \end{cases}$$

だから,

$$f(x)=\begin{cases} \int_0^{\pi/2} g(t)dt & (x\le\frac{1}{2}) \\ \int_0^{\alpha} g(t)dt-\int_\alpha^{\pi/2} g(t)dt & (\frac{1}{2}\le x) \end{cases} \quad \cdots ①$$

$g(t)$ の原始関数の1つに, $G(t)=\sin t+\frac{1}{2}x\cos 2t$ があるので①から.

1° $x\le\frac{1}{2}$ の時

$$f(x)=G(\pi/2)-G(0)=(1-\tfrac{1}{2}x)-\tfrac{1}{2}x=1-x$$

2° $\frac{1}{2}<x$ の時

$$f(x)=2G(\alpha)-G(0)-G(\pi/2)$$
$$=(2\sin\alpha+x\cos 2\alpha)-(1-\tfrac{1}{2}x)-\tfrac{1}{2}x$$

ここで, $0<\alpha<\pi/2$ 及び $g(\alpha)=0$ から

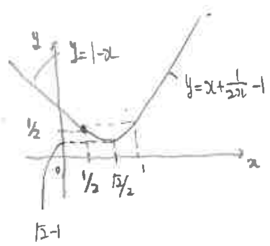
$$\sin\alpha=\frac{1}{2x}$$

だから

$$f(x)=\frac{1}{x}+x\left(1-2\left(\frac{1}{2x}\right)^2\right)-1$$
$$=x+\frac{1}{2x}-1 \quad (x=\tfrac{1}{2}\text{の時もコレで良い})$$

したがって

$$f(x)=\begin{cases} 1-x & (x\le\frac{1}{2}) \\ x+\frac{1}{2x}-1 & (\frac{1}{2}\le x) \end{cases}$$



で: このminは $\sqrt{2}-1$ //

(2) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^{1/2}(1-x)dx+\int_{1/2}^1\left(x+\frac{1}{2x}-1\right)dx$

$$=\left[x-\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^{1/2}+\left[\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{2}\log x-x\right]_{1/2}^1$$

0.25 - 0...

$$=\frac{3}{8}+\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\log 2\right)$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\log 2 \quad //$$

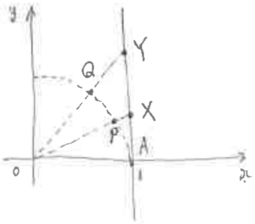
0.3×2.3

0.69

第 3 問

[解] $k>1 \cdots ①$

$\angle AOX=\alpha$, $\angle YOA=\beta$, $\angle XOY=\theta$ とおくと、



①から $\theta=\beta-\alpha \cdots ②$ である。$t=\tan\alpha$ とおくと、

題意から $\tan\beta=kt$ であるから $(0<t)$

$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)\quad(\because ②)$$

$$=\frac{kt-t}{1+t\cdot kt}=\frac{(k-1)t}{1+kt^2}$$

で $0\leqq\theta\leqq\pi/2$ から $\sin\theta=\sqrt{\dfrac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}}$ で $\tan^2\theta$ が最大の時 $\sin\theta$ も最大。…③

$\tan\theta\geqq 0$ から $\tan\theta$ が最大の時 $\tan^2\theta$ が最大で $t>0$ より AM-GM から

$$\tan\theta=(k-1)\frac{1}{kt+\frac{1}{t}}\leqq\frac{k-1}{2\sqrt{k}}\quad(\text{等号成立は } t=\tfrac{1}{\sqrt{k}})$$

で もとめる最大値は

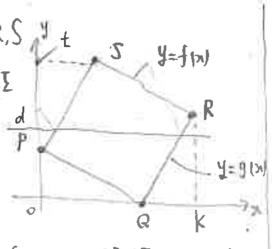
$$\frac{1}{2}\sin\theta=\frac{1}{2}\frac{\frac{k-1}{2\sqrt{k}}}{\sqrt{1+\frac{(k-1)^2}{4k}}}=\frac{k-1}{4\sqrt{k}}\frac{\sqrt{4k}}{\sqrt{(k+1)^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{k-1}{k+1}\quad(\because k>0)$$

—//

第 4 問

[解] 右のように座標をおく。Dの4頂点P,Q,R,Sとし，Rのx座標をkとおく。折れ線P-S-Rを$y=f(x)$，折れ線P-Q-Rを$g(x)$とおく。$y=d$（$0 \leq d \leq t$，ただしtはSのy座標）を軸にDを回転させた立体の体積$V(d)$として



（Pのy，Qのx座標が0以上）

$$\frac{V(d)}{\pi} = \int_0^k$$