T.K.大数学 2010

[解] $f(x)=1-c-xs$ $(s=\sin x,\ c=\cos x)$

(1) $f'(x)=s-s-xc=-xc$ から下表をうる。

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
f'		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$1-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	2

したがって、たしかに $f(x)=0$ は $0<x<\pi$ に唯1つ実解を持つ。■

(2) (1)から $0\leqq x\leqq\alpha$ では $f(x)\leqq 0$, $\alpha\leqq x\leqq\pi$ では $f(x)\geqq 0$ だから.

$$J=-\int_0^{\alpha} f(x)dx+\int_{\alpha}^{\pi} f(x)dx \quad \cdots ①$$

$f(x)$ の原始関数の1つを $F(x)$ とする。

$$F(x)=\int f(x)dx=x-s-[-xc+s]=x(1+c)-2s$$

とする①から

$$J=F(\pi)+F(0)-2F(\alpha)$$

$$=-2F(\alpha) \qquad (F(\pi)=0,\ F(0)=0)$$

$$=-2\alpha(1+\cos\alpha)+4\sin\alpha \quad \cdots ②$$

一方, $f(\alpha)=0$ から $\cos\alpha=1-\alpha\sin\alpha$ だから, ②から $\cdots ③$

$$J=-2\alpha(2-\alpha\sin\alpha)+4\sin\alpha \quad //$$

(3) $F=(J-\sqrt{2})/\sqrt{2}$ とおく。(2)から

$$F=-2\sqrt{2}\alpha+\sqrt{2}\alpha^2\sin\alpha+2\sqrt{2}\sin\alpha-1 \quad \cdots ④$$

又, ③から, $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ より

$$\sin^2\alpha+(1-\alpha\sin\alpha)^2=1$$

$$(\alpha^2+1)\sin^2\alpha-2\alpha\sin\alpha=0$$

$\sin\alpha\neq 0$ $(\because 0<\alpha<\pi)$ より.

$$(\alpha^2+1)\sin\alpha=2\alpha \quad \cdots ⑤$$

④より

$$F=\sqrt{2}\left((\alpha^2+1)\sin\alpha-2\alpha\right)+\sqrt{2}\sin\alpha-1$$

$$=\sqrt{2}\sin\alpha-1 \qquad (\because ⑤)$$

ここで (1)の表及び $f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=1+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{8}\pi>0$ $(\because ※)$ から, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3}{4}\pi$

より.

$$F>\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}-1=0 \qquad \therefore F>0$$

だから, $J>\sqrt{2}$

[解] $x = \left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)\right]$ …(*)

$\left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)\right] = k_a$ とおく。($k_a \in \mathbb{Z}$)

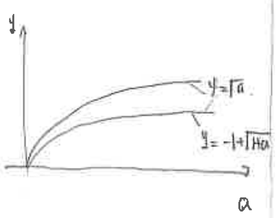
$$k_a \leq \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) < k_a + 1$$

(*)が解を持つ時, $x = k_a$ だから ($k_a > 0$)

$$k_a \leq \frac{1}{2}\left(k_a + \frac{a}{k_a}\right) < k_a + 1$$

$$k_a^2 \leq a < k_a^2 + 2k_a$$

$$-1 + \sqrt{1+a} < k_a \leq \sqrt{a} \quad \cdots P(a)$$



したがって, $P(a)$ をみたすような $k_a \in \mathbb{N}$ が存在すればそれが(*)の解である。

(1) $a = 7$ の時. $P(7)$ … $-1 + 2\sqrt{2} < k_a \leq \sqrt{7}$ $k_a = 2$ とすれば良い

$a = 8$ の時. $P(8)$ … $2 < k_a \leq 2\sqrt{2}$ これをみたす k_a はない

$a = 9$ の時. $P(9)$ … $-1 + \sqrt{10} < k_a \leq 3$ $k_a = 3$ とすれば良い

したがって. $a = 7$ … $x = 2$, $a = 8$ … ナシ, $a = 9$ … $x = 3$ //

(2) $t \in \mathbb{N}$ とする。

- $t^2 \leq a < (t+1)^2$ の時 $[\sqrt{a}] = t$
- $t^2 \leq a < (t+1)^2 - 1$ の時. $-1 + \sqrt{1+a}$ 以上の最小の自然数は t で. 等号は不成立

  $a = (t+1)^2 - 1$ の時. $-1 + \sqrt{1+a} = t$

だから. $P(a)$ が解を持たないのは $a = t^2 - 1$ ($t \in \mathbb{N}$) とかける時で, $a \in \mathbb{N}$ から

$a_1 = 3$ $a_2 = 8$ //

(3) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$ とおくと, (2)から

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2 - 1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \xrightarrow{n \to \infty} \frac{3}{4}$$ //

第 3 問

[解] n枚から2枚をとり出す場合の数は ${}_nC_2$ 通りで同様にたしからしい。

$n=3k+2$ $(k\in\mathbb{N})$ の時 2枚のうち小さい方が $3t$ $(t=1,\cdots,k)$ である場合の数 $p_k(t)$ は，大きい方が $3t+1, 3t+2, \cdots, 3k+2$ のいずれかであることより，

$$p_k(t)=(3k+2)-3t$$

だから全ての場合の数 n_k は

$$n_k=\sum_{t=1}^{k}p_k(t)=k(3k+2)-\frac{3}{2}k(k+1)=\frac{1}{2}k(3k+1)$$

となり，もとめる確率は

$$P(3k+2)=\frac{\frac{1}{2}k(3k+1)}{{}_{3k+2}C_2}=\frac{k}{3k+2} \quad //(2)$$

$k=2$として，$P(8)=\frac{1}{4}$ //

第 4 問

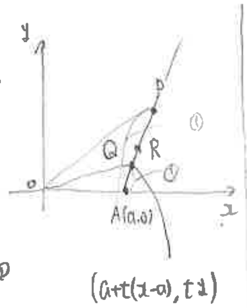
[解] $a>0$ …①

APの方向ベクトル $\vec{p}=\begin{pmatrix}x-a\\y\end{pmatrix}$ だから、題意の条件は

$$\overrightarrow{AQ}=t\begin{pmatrix}x-a\\y\end{pmatrix}\quad\left(0\le t\le \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{QP}{OQ}\le\frac{AP}{OA},\ OQ\ne 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a|1-t|}{\sqrt{\{a+t(x-a)\}^2+(ty)^2}}\le 1 \quad \cdots ①$$



だから、①が $0\le t\le \frac{1}{2}$ なる任意のtで成立すれば良い。①は各項正より、2乗して

$$a^2(1-t)^2\le t^2(x-a)^2+2a(x-a)t+a^2+t^2y^2$$

$$\{(x-a)^2+y^2-a^2\}t^2+\{2a(x-a)+2a^2\}t\ge 0$$

$$t\left[(x^2-2ax+y^2)t+2ax\right]\ge 0 \quad \cdots ② \quad (\text{左辺}f(t)\text{とおく})$$

1° $x^2-2ax+y^2>0$ の時

$s=f(t)$ のグラフをかんがえて、条件は

$$\frac{-2ax}{x^2-2ax+y^2}\le 0$$

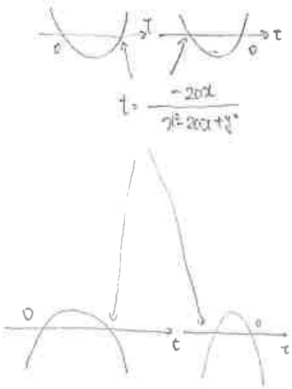
2° $x^2-2ax+y^2=0$ の時

$2ax\ge 0$ ならば良い

3° $x^2-2ax+y^2<0$ の時

$s=f(t)$ のグラフをかんがえて、条件は

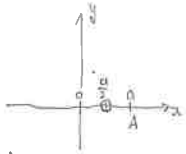
$$\frac{1}{2}\le\frac{-2ax}{x^2-2ax+y^2}$$



①とあわせて、まとめると

$(x-a)^2+y^2\ge a^2$ の時 $x\ge 0$

$(x-a)^2+y^2<a^2$ の時、$\left(x-\frac{1}{2}a\right)^2+y^2\ge\left(\frac{a}{2}\right)^2$



これと、$P\ne A$、$OQ\ne 0$ からPはx軸上 $x\le\frac{a}{2}$ の部分をとらないことから、下図斜線部（境界は含み、Oのみ含まない）