T. K. 大数学 2009

第　　問

[解] $A(\alpha, \frac{1}{2}\alpha^2)$, $B(\beta, \frac{1}{2}\beta^2)$ $(\alpha<\beta)$ とおく。2接線は

$$\begin{cases} y=\alpha x-\frac{1}{2}\alpha^2 & \cdots l_A \\ y=\beta x-\frac{1}{2}\beta^2 & \cdots l_B \end{cases}$$

だから、これらが直交する時、$\alpha\beta=-1 \cdots ①$ である。l_A, l_Bの交点のx座標は $x=\frac{\alpha+\beta}{2}\equiv\gamma$ だから

$$S=\int_\alpha^\gamma \frac{1}{2}(x-\alpha)^2dx+\int_\gamma^\beta \frac{1}{2}(x-\beta)^2dx$$

$$=\frac{1}{12}\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{24}(\beta-\alpha)^3 \quad \cdots ②$$

①から $\beta=-\frac{1}{\alpha}$ ($\because \alpha\neq 0$) だから ②から

$$S=-\frac{1}{24}\left(\frac{1}{\alpha}+\alpha\right)^3 \quad \cdots ②'$$

又、$\alpha<\beta=-\frac{1}{\alpha}$ から、$\alpha<0 \cdots ③$ であり、新たに $t=-\alpha\ (>0)$ として

②'に代入して

$$S=\frac{1}{24}\left(t+\frac{1}{t}\right)^3 \geq \frac{1}{24}(2)^3=\frac{1}{3}_{\#}$$

($\because t>0$ からAM-GM, 等号成立は $t=1$)

第 2 問

[解] $f(x,y)=\left(ax+(a-2)y,\ (a-2)x+ay\right)$

(1)から、$l:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}c\\s\end{pmatrix}$ とおける $\left(c=\cos\theta,\ s=\sin\theta,\ -\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right)$ ので、l上の点

Qに$t=t_1$が対応するとして、(2)から

$$f(Q)=\left(at_1c+(a-2)(t_1s+1),\ (a-2)t_1c+a(t_1s+1)\right)$$

がl上にあるので、

$$\overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix}(ac+(a-2)s)t_1+a-2\\(as+(a-2)c)t_1+a\end{pmatrix}$$

A$(0,1)$として

$$\overrightarrow{AQ}=\begin{pmatrix}(ac+(a-2)s)t_1+a-2\\(as+(a-2)c)t_1+a-1\end{pmatrix}$$

これが$\begin{pmatrix}c\\s\end{pmatrix}$と平行ならQは$l$上にある。平行条件から

$$\{(ac+(a-2)s)t_1+(a-2)\}s-\{(as+(a-2)c)t_1+a-1\}c=0$$

したがってこれが任意の$t_1\in\mathbb{R}$で成立するθの存在条件をかんがえれば良い。変形して

$$\{acs+(a-2)s^2-acs-(a-2)c^2\}t_1+(a-2)s-(a-1)c=0$$

$$(a-2)(s^2-c^2)t_1+\{(a-1)s-(a-2)c\}=0$$

よって条件は

$$(a-2)(s^2-c^2)=0\ \wedge\ (a-1)s=(a-2)c \quad \cdots ①$$

①から、$a-2=0$ or $s^2=c^2$が必要。

1° $a=2$の時

後者は$s=0$となり、これをみたすθは存在し十分。

2° $a\neq2$の時

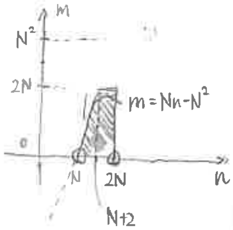
$s^2=c^2$である。sとcが同時に0となることはないので、$s=c$なら後者をみたすaはなく、$s=-c$ならば$a=\frac{3}{2}$とすれば十分。

以上から $a=2,\frac{3}{2}$ //

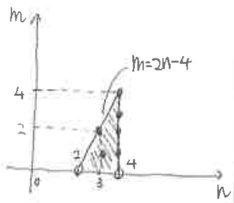
[解] $m, n \in N \leq 2N$ …① $f(x) = x^2 - nx + m$ とおく。$f(x)=0$ の判別式 D として、これが $x \geqq N$ に実解を持つ条件は、$f(x)$ の軸 $x = \frac{n}{2} \leq N$ だから(∵①)

$$f(N) \leq 0 \quad \therefore\ N^2 - nN + m \leq 0 \quad \cdots ②$$

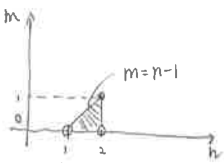
①∧②をみたす領域を nm 平面に図示して右下図斜線部(境界は $m=0$ のみ含まず)だから、もとめる数を $F(N)$ として



(N≧3の時)



(N=2の時)



(N=1の時)

<u>N≧3の時</u>

$$F(N) = N + (2N-N-1)\cdot 2N$$
$$= (2N-1)\cdot N$$

これは $N=2$ でも成立

<u>N=1の時</u>

$F(1) = 1$ で、上の式でよい。

以上から、

$$(2N-1)\cdot N$$

第 4 問

[解] lの方向ベクトルは$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$である.

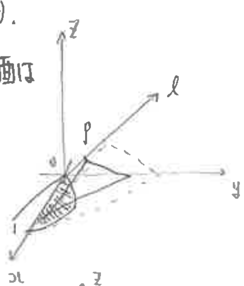
(1) 題意の平面$\pi(t)$として

$$\pi: x+y+z=t$$

だから. $z=0$の時 $\begin{cases}x+y=t\\ z=0\end{cases}$ //

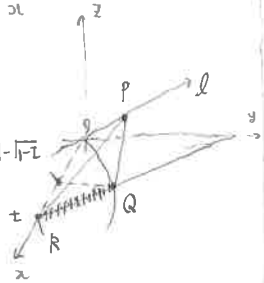
(2) l上に. $\overrightarrow{OP}=\frac{t}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$なる点P ($t\in\mathbb{R}$)をとり.

Pを通りlと垂直な平面で切断する. 切断面は右下図。R$(t,0,0)$とおく.



($x+y=t$, $y=x(1-x)$の交点Qは, $0\le t\le 1$に対してそのx座標が $x=1-\sqrt{1-t}$)

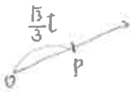
$$\overline{PQ}^2=\left|\begin{pmatrix}1-\sqrt{1-t}-\frac{1}{3}t\\ (1-\sqrt{1-t})\sqrt{1-t}-\frac{1}{3}t\\ \frac{1}{3}t\end{pmatrix}\right|^2$$



$$=\left\{\left(1-\tfrac{1}{3}t\right)-\sqrt{1-t}\right\}^2+\left\{(1-\sqrt{1-t})\sqrt{1-t}-\tfrac{1}{3}t\right\}^2+\frac{1}{9}t^2$$

$$=\frac{2}{3}t^2-4t+4-2(2-t)\sqrt{1-t}$$

$$\overline{PR}^2=\left|\begin{pmatrix}t-\frac{1}{3}t\\ -\frac{1}{3}t\\ -\frac{1}{3}t\end{pmatrix}\right|^2=\frac{2}{3}t^2$$



$\overline{PQ}^2$と$\overline{PR}^2$及び図から. この平面での立体の面積$S(t)$は

$$\frac{S(t)}{\pi}=\overline{PR}^2-\overline{PQ}^2=4t-4+2(2-t)\sqrt{1-t}$$

だから. もとめる体積Vとして

$$V=\int_0^1 S(t)\frac{\sqrt{3}}{3}dt$$

$$\frac{V}{\frac{\sqrt{3}}{3}\pi}=\int_0^1\left(4(t-1)+2\sqrt{1-t}+2(1-t)\sqrt{1-t}\right)dt \quad \cdots①$$

であり.

$$\int_0^1(t-1)dt=\left[\tfrac{1}{2}t^2-t\right]_0^1=-\frac{1}{2}$$

$$\int_0^1\sqrt{1-t}\,dt=\left[-\tfrac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

$$\int_0^1(1-t)\sqrt{1-t}\,dt=\left[-\tfrac{2}{5}(1-t)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{5}$$

と①に代入して

$$V=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi\left[-2+\frac{4}{3}+\frac{4}{5}\right]=\frac{2\sqrt{3}}{45}\pi$$ //