T.K.大数学 2008

[解] $a, b>0 \cdots ①$. $f(x)=x^a$, $g(x)=\log bx$ $(x>0)$ とおく。

接点を $P(s, t)$ とする。$f'(x)=ax^{a-1}$, $g'(x)=\dfrac{1}{x}$ である。

(1) P について、$f(s)=g(s)$, $f'(s)=g'(s)$ が成り立つ。

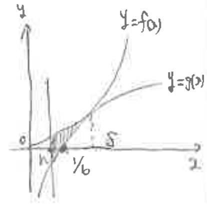
$$\begin{cases} s^a=\log bs=t & \cdots ② \\ as^{a-1}=\dfrac{1}{s} & \cdots ③ \end{cases}$$

③から $s^a=\dfrac{1}{a}$ $(\because ①, s>0)$ だから $s=\left(\dfrac{1}{a}\right)^{\frac{1}{a}}$ // ②に代入して

$$b=\frac{1}{s}e^{\frac{1}{a}}=(ae)^{\frac{1}{a}} \text{ //}$$

$$t=\frac{1}{a} \text{ //}$$

(2) $y=g(x)$, $y=f(x)$ のグラフは右図。$h\to 0$ とするので、



$h<\dfrac{1}{a}$ のもとで考えればよく、

$$A(h)=\int_h^s (f(x)-g(x))\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{a+1}x^{a+1}-x(\log b+\log x-1)\right]_h^s$$

$$=\frac{1}{a+1}\{s^{a+1}-h^{a+1}\}-s(\log b+\log s-1)+h(\log b+\log h-1)$$

$$=\left\{-\frac{1}{a+1}h^{a+1}+h(\log b+\log h-1)\right\}+\frac{1}{a+1}\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{a+1}{a}}-\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a}-1\right)$$

$$\xrightarrow{h\to 0}\left\{\frac{1}{a(a+1)}-\frac{1-a}{a}\right\}\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{a}}=\frac{a}{a+1}\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{a}} \text{ //}$$

[解] $f(x) \in \mathbb{Z}$, $x \leq f(x) < x+1$ ‥①, $a, b > 0$ ‥②

①から

$$\begin{cases} ax-7 \leq f(ax-7) < ax-6 \\ bx+3 \leq f(bx+3) < bx+4 \end{cases} \quad \cdots ※$$

だから

$$\frac{1}{ax-6} - \frac{1}{bx+3} \leq \underbrace{\frac{1}{f(ax-7)} - \frac{1}{f(bx+3)}}_{Aとおく} < \frac{1}{ax-7} - \frac{1}{bx+4}$$

$$\frac{(b-a)x+9}{(ax-6)(bx+3)} < A < \frac{(b-a)x+11}{(ax-7)(bx+4)}$$

$x \to \infty$をかんがえるので, $x>0$としておく.

$$\frac{(b-a)x+9}{(ax-6)(bx+3)}x^c < A \cdot x^c < \frac{(b-a)x+11}{(ax-7)(bx+4)}x^c \quad \cdots ③$$

Ⓐ: $a \neq b$

1° $c<1$の時

③の分母子x^2でわって(>0)

$$\frac{b-a+9/x}{\left(a-\frac{6}{x}\right)\left(b+\frac{3}{x}\right)}x^{c-1} < A \cdot x^c < \frac{b-a+11/x}{\left(a-\frac{6}{x}\right)\left(b+\frac{3}{x}\right)}x^{c-1}$$

この両辺は0に収束するので, はさみうちから $Ax^c \to 0$

2° $c=1$の時

1°と同じく, $A \cdot x \longrightarrow \dfrac{b-a}{ab}$

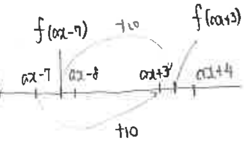
3° $c>1$の時

1°と同じく, $Ax^c \longrightarrow \infty$

以上から $\max c = 1$, 収束値は $\dfrac{b-a}{ab}$ //

Ⓑ: $a=b$

右図から $f(ax+3)=f(ax-7)+10$だから,



$B=f(ax-7)$として

$$A = \frac{1}{B} - \frac{1}{B+10} = \frac{10}{B(B+10)}$$

※から

$$\frac{10x^c}{(ax-6)(ax+4)} < Ax^c < \frac{10x^c}{(ax-7)(ax+3)}$$

以下Ⓐと同じく, $\max c = 2$, $Ax^2 \longrightarrow \dfrac{10}{a^2}$ //

★最高次のはとりま場合わけしとく

[解] 数k (k=1,2…6)の出る確率をp_kとおくと、$\sum_{k=1}^{6} p_k = 1$ …①

(1) $P=\sum_{k=1}^{6} p_k^2$ である。コーシー・シュワルツの不等式から

$$P \ge \frac{1}{6}\left(\sum_{k=1}^{6} p_k\right)^2 = \frac{1}{6} \quad (\because ①)$$ 答

等号成立は $p_k=1/6$ の時 //

(2) $Q=(p_1+p_3+p_5)(p_2+p_4+p_6)$ である。$p_k \ge 0$からAM-GMより

$$\sqrt{Q} \le \frac{\sum_{k=1}^{6} p_k}{2} = \frac{1}{2}$$

$$Q \le \frac{1}{4} \quad (\because Q>0) \quad \cdots ②$$

一方、$t=p_1+p_3+p_5$ $(0 \le t \le 1)$ とおくと、①より $1-t=p_2+p_4+p_6$ で、

コーシー・シュワルツの不等式から

$$3(p_1^2+p_3^2+p_5^2) \ge t^2$$
$$3(p_2^2+p_4^2+p_6^2) \ge (1-t)^2$$

だから

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}P \le \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left\{t^2+(1-t)^2\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left[1-(2t^2-2t+1)\right] = t(1-t) = Q \quad \cdots ③$$

②,③から

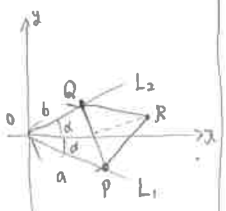
$$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}P \le Q \le \frac{1}{4}$$ 答

第4問

[解] $t = \tan\alpha$ とおく。$L_1: y = -tx$, $L_2: y = tx$ $(x \geqq 0)$ である。

以下 $c = \cos\alpha$, $s = \sin\alpha$ と書く。正の実数をとるパラメータ

a, b を用いて、



$$\overrightarrow{OP} = a\begin{pmatrix} c \\ -s \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OQ} = b\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$$

とおける。△OPQ に余弦定理を用いて、

$$1 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 2\alpha \quad \cdots ① \quad (\because \overline{PQ} = 1)$$

PQの中点をMとする。$\because \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} (b-a)c \\ (b+a)s \end{pmatrix}$ だから $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{MR}$, $|\overrightarrow{MR}| = \frac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{PQ}|$

及び RがPQに関してOと反対側にあることから、

$$\overrightarrow{MR} = \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} (b+a)s \\ -(b-a)c \end{pmatrix}$$

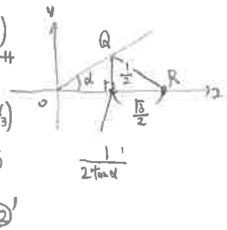
だから $M\left(\frac{a+b}{2}c, \frac{b-a}{2}s\right)$ とあわせて、$I = a+b$, $H = b-a$ として

$$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} Ic \\ Hs \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} Is \\ -Hc \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I(c+\sqrt{3}s) \\ H(s-\sqrt{3}c) \end{pmatrix}$$

したがって $R(X, Y)$ とおくと、

$$\begin{cases} X = \frac{I}{2}(c+\sqrt{3}s) \\ Y = \frac{H}{2}(s-\sqrt{3}c) \end{cases} \quad \cdots ②$$

(1) PQ // y軸の時 右の図から $R\left(\frac{1}{2\tan\alpha} + \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ …(答)



(2) $c + \sqrt{3}s = 2\sin(\alpha + \pi/6)$, $s - \sqrt{3}c = 2\sin(\alpha - \pi/3)$

で、$0 < \alpha < \pi/3$ …③からいずれも0でないので、②から

$$I = \frac{2X}{(c+\sqrt{3}s)}, \quad H = \frac{2Y}{(s-\sqrt{3}c)} \quad \cdots ②'$$

①から、

$$1 = \frac{I^2 + H^2}{2} - \frac{I^2 - H^2}{2}\cos 2\alpha \quad (\because ②')$$

$$2 = (1 - \cos 2\alpha)\left(\frac{2X}{c+\sqrt{3}s}\right)^2 + (1 + \cos 2\alpha)\frac{(2Y)^2}{(s-\sqrt{3}c)^2}$$

$$1 = \frac{X^2}{\left(\frac{c+\sqrt{3}s}{2s}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\frac{s-\sqrt{3}c}{2c}\right)^2}$$

これは楕円の方程式だから、$R(X, Y)$ は楕円の周である。(答)