T.k.大数学 2007

第 1 問

[解] (1) p^mでわり切れる…$p^{n+1}/p^m=p^{n+1-m}$ だからもとめるのは
p^{m+1} 〃 …$p^{n+1}/p^{m+1}=p^{n-m}$

$$p^{n+1-m}-p^{n-m} \quad (\because 0\leq m\leq n)$$

(2) $x=y$となる場合も含むこととする。xがp^mでわり切れ、p^{m+1}でわり切れないとする。$(m=0,1,\cdots,n+1)$
この時、xyがp^{n+1}でわり切れるための条件は、yがp^{n+1-m}でわり切れることである。

1° $0\leq m\leq n$

(1)とあわせて、この時の(x,y)のくみあわせは、

$$(p^{n+1-m}-p^{n-m})\cdot p^m=p^{n+1}-p^n \text{ 通り。}$$

2° $m=n+1$

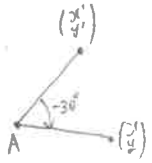
この時、$x=p^{n+1}$、yは任意だから、p^{n+1}通り

以上から、もとめる個数は

$$\sum_{m=0}^{n}(p^{n+1}-p^n)+p^{n+1}=(n+2)p^{n+1}-(n+1)p^n$$

第 2 問

[解] 題意の接線は $l': y-a^2=2a(x-a)$ である。l'上の点(x',y')が l上の点(x,y)にうつるとすると、



$$\begin{pmatrix} x'-a \\ y'-a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-a^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-a^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}(x-a) - \frac{1}{2}(y-a^2) \\ \frac{1}{2}(x-a) + \frac{\sqrt{3}}{2}(y-a^2) \end{pmatrix}$$

をみたすから、l上の点(x,y)は

$$\frac{1}{2}(x-a) + \frac{\sqrt{3}}{2}(y-a^2) = 2a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(x-a) - \frac{1}{2}(y-a^2)\right)$$

$$x+\sqrt{3}y - a - \sqrt{3}a^2 = 2\sqrt{3}ax - 2\sqrt{3}a^2 - 2ay + 2a^3$$

$$(\sqrt{3}+2a)y = (2\sqrt{3}a-1)x + a + 2a^3 - \sqrt{3}a^2 \quad /\!/ \ (1)$$

[別1] lのカタムキ$\tan\alpha$とおく。$\tan\beta=2a$として $\alpha=\beta-30°$ だから

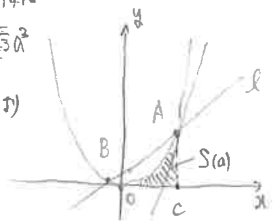
$$\tan\alpha = \frac{\tan\beta - \tan 30°}{1+\tan\beta\tan 30°} = \frac{2a-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{2}{3}\sqrt{3}a} = \frac{2\sqrt{3}a-1}{\sqrt{3}+2a}$$

より、 $y = \dfrac{2\sqrt{3}a-1}{\sqrt{3}+2a}(x-a)+a^2$ （例外はしっかり考えなければダメかも[illegible]）

$a>0$から、lは $y=x^2$ と2交点を持ち、そのx座標は

$$(\sqrt{3}+2a)x^2 = (2\sqrt{3}a-1)x + a + 2a^3 - \sqrt{3}a^2$$

の2解で $x=a, \dfrac{-2a^2+\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}} \ (<a)$ だから 図より



$\alpha = \dfrac{-2a^2+\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}$ として

$$T(a) = \frac{1}{6}(a-\alpha)^3$$

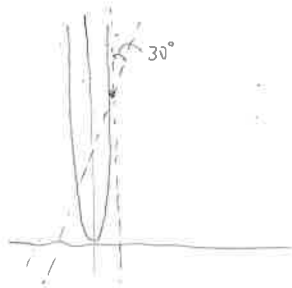
$$= \frac{1}{6}\left(\frac{4a^2+1}{2a+\sqrt{3}}\right)^3$$

$$S(a) = \int_0^a x^2\,dx = \frac{1}{3}a^3$$

だから

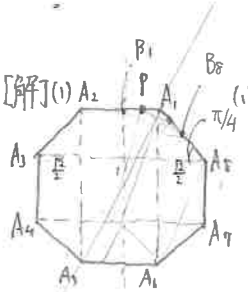
$$\frac{T(a)}{S(a)} = \frac{3}{6}\left(\frac{4a^2+1}{2a^2+\sqrt{3}a}\right)^3 = \frac{1}{2}\left(\frac{4+1/a^2}{2+\sqrt{3}/a}\right)^3 \longrightarrow \frac{1}{2}8 = 4 \quad (a\to\infty) \ /\!/$$

☆



第 3 問

[解] (1)



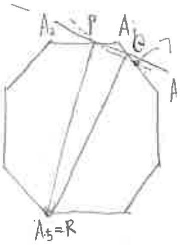
(A_kA_{k+1} ($A_9=A_1$とする)の中点 B_kとする)

(1) Pが辺 A_1A_2上をうごくとして良い。Qの場所で場合分けする。$\triangle PQR$の面積Sとする。

1° Qが A_1A_2上

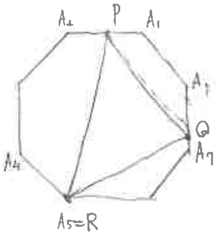
P, Qが A_1, A_2のいずれかに一致し, Rが A_5A_6上にある時, $\max S = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+\sqrt2) = \frac{1+\sqrt2}{2}$

2° Qが A_1A_8上



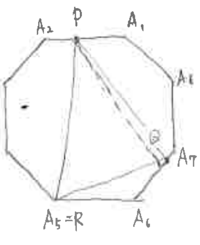
PQを底面とみることにより, $R=A_5$の時Sは最大。次にQをうごかす。PRを底辺とみて, $Q=A_8$の時Sは最大。Pについても同じく, Sが最大の時, 三角形は $\triangle A_2A_5A_8$に一致し, $\max S = \frac{1}{2}(1+\sqrt2)(1+\frac{\sqrt2}{2})$

3° Qが A_8A_7上



対称性から, $\overline{A_1P} \leq \overline{A_8Q}$の時のみかんがえれば良い。PQを固定し底辺とみると, $R=A_5$の時Sは最大。次にQをうごかすと, $Q=A_7$でSが最大, Pについても同じく, Sが最大の時, 三角形は $\triangle A_2A_7A_5$に一致し, $\max S = \frac{1}{2}(1+\sqrt2)(1+\frac{\sqrt2}{2})$

4° Qが A_7A_6上



対称性から $\overline{A_1P} \geq \overline{A_7Q}$の時のみかんがえれば良い。PQを固定し, 底辺とみると, $R=A_5$の時Sは最大。以下3°と同じく, Sが最大の時, 三角形は $\triangle A_2A_5A_7$に一致。

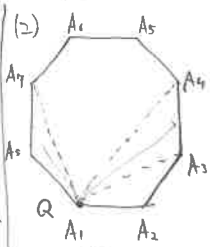
5° Qが A_5A_6上の時

明らかに $\triangle PQR$が $\triangle A_2A_5A_7$に一致するときSが最大

対称性から以上で場合はつくされ, $\frac{1+\sqrt2}{2} < \frac{1}{4}(1+\sqrt2)(2+\sqrt2)$ だから

$\max S = \frac{1}{4}(1+\sqrt2)(2+\sqrt2) = 1+\frac{3\sqrt2}{4}$ //

(2)

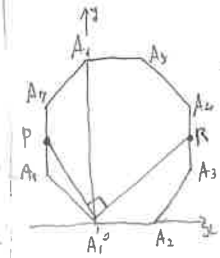


対称性から, Pが A_1A_8, A_8A_7上にある時をしらべれば良い。

1° Pが A_1A_8上の時

$\angle PQR = \angle R$より, $R=A_4$で, QRを底辺とみれば $P=A_1$の時, $\max S = \frac{1}{2}(1+\sqrt2)$

2° Pが A_8A_7上



左のように座標軸を取る。この時Rは A_3A_4上で,

$P(-\frac{\sqrt2}{2}, a)$
$R(1+\frac{\sqrt2}{2}, b)$
$(\frac{\sqrt2}{2} \leq a, b \leq \frac{\sqrt2}{2}+1)$

とおける。$\angle PQR = \angle R$より $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}=0$ だから

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt2}{2} \\ a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+\frac{\sqrt2}{2} \\ b \end{pmatrix} = 0$$

$\therefore ab = \frac{1}{2}(1+\sqrt2)$ ……①

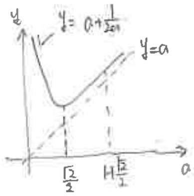
このもとで, サラスの公式から

$$S = \frac{1}{2}\left|(1+\frac{\sqrt2}{2})a + \frac{\sqrt2}{2}b\right|$$

$$= \frac{2+\sqrt2}{4}\left(a+\frac{1}{2a}\right) \quad \cdots (\because ①)$$

$$\leq \frac{2+\sqrt2}{4}\left\{(1+\frac{\sqrt2}{2}) + \frac{1}{2+\sqrt2}\right\} \quad (\text{等号成立は } a=1+\frac{\sqrt2}{2})$$

$$= 1+\frac{\sqrt2}{2}$$



$\frac{1+\sqrt2}{2} < 1+\frac{\sqrt2}{2}$ から, もとめるのは, $\max S = 1+\frac{\sqrt2}{2}$ //

$\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0$

第4問

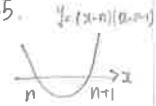
[解] (1) $f_n'(x)=-a_n\{2x-(2n+1)\}$ だから、$x=\alpha_n$ で接するとすると

$$\begin{cases} -a_n(\alpha_n-n)(\alpha_n-n-1)=e^{-\alpha_n} & \cdots ① \\ -a_n(2\alpha_n-2n-1)=-e^{-\alpha_n} & \cdots ② \end{cases}$$

①②からまず$e^{-\alpha_n}$を消去して、$a_n\neq0$から

$$-(\alpha_n-n)(\alpha_n-n-1)=2\alpha_n-2n-1$$
$$\alpha_n^2+(-2n+1)\alpha_n+n^2-n-1=0$$
$$\alpha_n=\frac{1}{2}\left[(2n-1)\pm\sqrt{(2n-1)^2-4(n^2-n-1)}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[(2n-1)\pm\sqrt{5}\right]$$
$$=n+\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \quad\cdots③$$

ここで$a_n>0$及び$e^{-\alpha_n}>0$から、$(\alpha_n-n)(\alpha_n-n-1)<0$だから



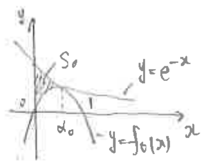
③で複号正を採用して。($n<\alpha_n<n+1$)

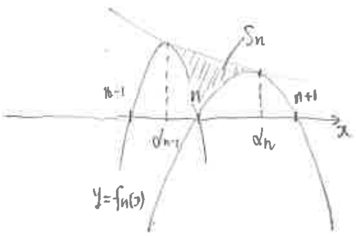
$$\alpha_n=n+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

②に代入して

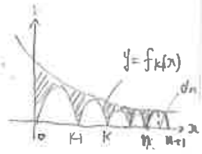
$$a_n=\frac{e^{-n-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}}{2n-1+\sqrt{5}-2n-1}=(2+\sqrt{5})e^{-n-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \quad //$$

(2)





上図から、$T_n=\sum_{k=0}^{n}S_k$とおくと、nが十分大きい時、



$$T_n=\int_0^{\alpha_n}e^{-x}dx-\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}f_k(x)dx-\int_n^{\alpha_n}f_n(x)dx \quad ④$$

であり、

$$\int_0^{\alpha_n}e^{-x}dx=1-e^{-\alpha_n}$$
$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}f_k(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{6}a_k=\frac{2+\sqrt{5}}{6}e^{-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\frac{1-(1/e)^n}{1-(\frac{1}{e})}$$
$$\int_n^{\alpha_n}f_n(x)dx=-a_n\int_n^{\alpha_n}(x-n)(x-n-1)dx=a_n\int_0^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}x(x-1)dx=Aa_n$$

(Aはnにムカンケイな定数)

より、④に代入して

$$T_n=1-\left(\frac{1}{e}\right)^{\alpha_n}-\frac{2+\sqrt{5}}{6}\frac{e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}}{e-1}\left\{1-\left(\frac{1}{e}\right)^n\right\}-A\cdot a_n$$
$$\longrightarrow 1-\frac{2+\sqrt{5}}{6}\frac{e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}}{e-1} \quad (n\to\infty) \quad //$$

(α_n, a_nの表す式から $a_n\to0$, $\left(\frac{1}{e}\right)^{\alpha_n}, \left(\frac{1}{e}\right)^n\to0$)