T.k.大数学 2006

ここから

OK

第 1 問

[解] (1) $I_n=\int_0^{\frac{n\pi}{2}}|\sin x|\,dx$ …①。$a_k=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin x|\,dx$ とおくと、

$a_k=2$

だから、

$$I_n=\begin{cases}\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}}a_k=2m & (n=2m,\ m\in\mathbb{N})\\ \sum_{k=1}^{m}a_k+\int_{m\pi}^{(m+\frac{1}{2})\pi}|\sin x|\,dx & (n=2m+1)\\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\,dx & (n=1)\end{cases}$$

$=n$ //

(2) $0\le\int_0^{\frac{s\pi}{2}}\cos x\,dx-s\le\left(\frac{\pi}{2}-1\right)s \quad (0\le s\le 1)$

$\Leftrightarrow s\le\sin\frac{s\pi}{2}\le\frac{\pi}{2}s \quad (0\le s\le 1)$ …＊

を示せば良い(ジョルダン)。まず左側を示す。

$\left(\sin\frac{s\pi}{2}-s\right)'=\frac{\pi}{2}\cos\frac{s\pi}{2}-1\equiv f'(s)$

から、$\frac{\pi}{2}\cos\frac{\alpha\pi}{2}=1$ $(0<\alpha<1)$ なる α を用いて、下表を得る。

s	0		α		1
f'		$+$	0	$-$	
f	0	↗		↘	0

よって、区間内で $f(s)\ge 0$ …①

次に右側を示す。$h(s)=\frac{\pi}{2}s-\sin\frac{\pi s}{2}$ として

$h'(s)=\frac{\pi}{2}\left(1-\cos\frac{\pi s}{2}\right)\ge 0$

から、区間内で
$h(s)\ge h(0)=0$ …②

以上①②から ＊は示された ■

(3) $a\le\int_0^{\frac{a\pi}{2}}|\sin t|\,dt\le\left(\frac{\pi}{2}-1\right)(a-[a])+a$ … ＊$_1$ $(\because a>0)$

を示せばよい。$[a]=2m-1$ $(m\in\mathbb{N})$ と表せる時、フロア-関数の性質から

$2m-1\le a<2m$ …③

が成り立つ。ここで $a=2m-1+\alpha$ $(0<\alpha\le 1)$ とおくと、

$\int_0^{\frac{a\pi}{2}}|\sin t|\,dt=\int_0^{\frac{(2m-1)\pi}{2}}|\sin t|\,dt+\int_{\frac{(2m-1)\pi}{2}}^{\frac{(2m-1+\alpha)}{2}\pi}|\sin t|\,dt$

$=2m-1+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\alpha-1}{2}\pi}\sin t\,dt$ $\left(\because (1),\ 0\le t\le\frac{\alpha\pi}{2}\text{ で }\sin t\ge 0\right)$ …④

$=2m-1+\int_0^{\frac{\alpha}{2}\pi}\cos t\,dt$

だから ＊$_1$ に代入して

$\alpha\le\int_0^{\frac{\alpha\pi}{2}}\cos t\,dt\le\frac{\pi}{2}\alpha \quad (0<\alpha\le 1)$

これは(2)から成立 ■

第 2 問

[解] (1) $a, b > 0$, $g(t) = \frac{1}{b}t^{a} - \log t$ とする.

$$g'(t) = \frac{a}{b}t^{a-1} - \frac{1}{t} = \frac{1}{t}\left(\frac{a}{b}t^{a} - 1\right)$$

から下表をうる

t	0		$\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{a}}$		∞
g'		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{a}\left(1-\log\frac{b}{a}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

//

極値は $g\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{a}}\right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{a}\log\frac{b}{a}$ //

(2) $m > 0$ とする

$$\begin{cases} y > x > 0 \\ \frac{1}{y}t^{x} - \log t \geq m \quad (t\text{は任意の正数}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y > x > 0 \\ \frac{1}{x}\left(1 - \log\frac{y}{x}\right) \geq m \end{cases} \quad (\because (1))$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < y \leq x \cdot e^{1-mx} \equiv f(x)$$

であり.

・$f'(x) = e^{1-mx}(1 - mx)$

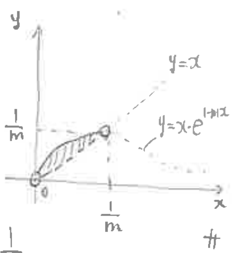
∵・$f(x) \geqq x \Leftrightarrow x \leqq \frac{1}{m}$ $(\because 0 < x)$

から下表をうる

x	0		$\frac{1}{m}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$\to 0$		$\frac{1}{m}$		$\to 0$

グラフの概形は下図斜線部(境界は太線のみ含み,点線部,0は除く)

この面積 S は



//

$$S = \int_{0}^{\frac{1}{m}} x e^{1-mx}\,dx - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}\right)^{2}$$

$$= e\int_{0}^{\frac{1}{m}} x \cdot e^{-mx}\,dx - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}\right)^{2}$$

$$= e\left[e^{-mx}\left(\frac{x}{-m} - \frac{1}{m^{2}}\right)\right]_{0}^{\frac{1}{m}} - \frac{1}{2}\frac{1}{m^{2}}$$

$$= e\left[e^{-1}\left(-\frac{2}{m^{2}}\right) + \frac{1}{m^{2}}\right] - \frac{1}{2}\frac{1}{m^{2}}$$

$$= \left(-\frac{5}{2} + e\right)\frac{1}{m^{2}}$$ //

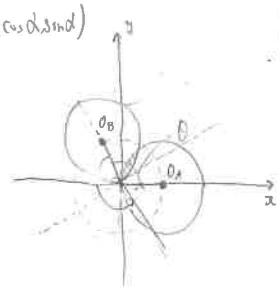
第　3　問

[解] xy平面上で $P(0,0)$ となるようにする。題意の3円を A, B, C とし、

$A: (x-1)^2+y^2=1$ と固定してよい。B, C の中心は $x^2+y^2=1$ 上にあり、円 K $(K=A,B,C)$ の中心を O_K と表す。$O_B(c,s)$ $(c=\cos\theta,\ s=\sin\theta,\ 0\leq\theta\leq\pi)$ とおく。

この時、条件をみたす O_C の条件は、O_C の中心 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ として $(0\leq\alpha\leq 2\pi)$

$$\pi\leq\alpha\leq\theta+\pi \quad \cdots ①$$



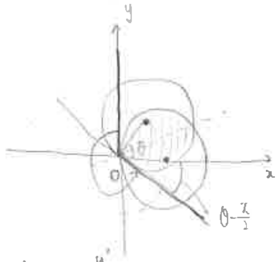
さて、中心と原点を結んだ線分のなす角 θ の時 (図I)、その共通部の面積 $S(\theta)$ は

$$S(\theta)=4\int_{\sin\frac{\theta}{2}}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

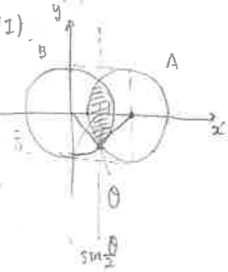
$$=4\int_{\frac{\theta}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt$$

$$=4\left[\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_{\frac{\theta}{2}}^{\pi/2}$$

$$=\pi-\theta-\sin\theta$$



である。OO_A, OO_B, OO_C のなす角は ①より、(図I)



$$\begin{cases} OO_A\text{から}OO_B \cdots \theta \\ OO_B\text{から}OO_C \cdots \alpha-\theta \\ OO_C\text{から}OO_A \cdots 2\pi-\alpha \end{cases}$$

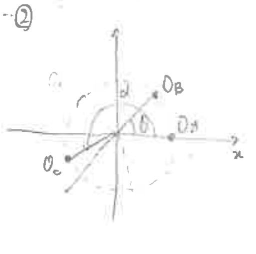
だから、もとめる面積の和 S は

$$S=3\pi-\underbrace{\left(S(\theta)+S(\alpha-\theta)+S(2\pi-\alpha)\right)}_{T\text{とおく}} \quad \cdots ②$$

$$T=3\pi-(\theta+\alpha-\theta+2\pi-\alpha)$$

$$-\sin\theta-\sin(\alpha-\theta)-\sin(2\pi-\alpha)$$

$$=\pi-(\sin\theta+\sin(\alpha-\theta)+\sin\alpha)$$



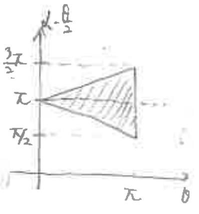
②に代入して

$$S=2\pi+\sin\theta+\sin(-\alpha)+\sin(\alpha-\theta)$$

$$S-2\pi=-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)+\sin\theta\equiv f(\alpha) \quad \cdots ③$$

①から $\pi-\frac{\theta}{2}\leq\alpha-\frac{\theta}{2}\leq\pi+\frac{\theta}{2}$、$0\leq\theta\leq\pi$ だから、

右図から θ を固定した時の最大値は、$\sin\frac{\theta}{2}\geq 0$ から $\alpha-\frac{\theta}{2}=\pi$ の時で



$$\max f=2\sin\frac{\theta}{2}+\sin\theta\equiv g(\theta)$$

次に θ をうごかす。

$$g'(\theta)=\cos\frac{\theta}{2}+2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=(2t-1)(t+1) \quad \left(t=\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

よって下表をうる

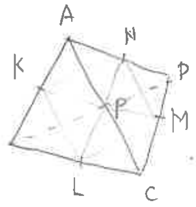
θ	0		$\frac{2}{3}\pi$		π
t	1		$1/2$		0
g'		$+$	0	$-$	
g		↗		↘	

したがって $g(\theta)$ は $\theta=\frac{2}{3}\pi$ で max $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ をとるから、③より

$$\max S=2\pi+\frac{3}{2}\sqrt{3}_{\#}$$

[解] 各点の位置ベクトルをその小文字で表す。題意から

$$\vec{k}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}) \quad \vec{m}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})$$
$$\vec{l}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}) \quad \vec{n}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{d})$$



(1) $\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{LN}=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}-\vec{d})\cdot(\vec{a}+\vec{d}-\vec{b}-\vec{c})$

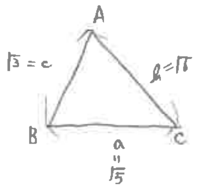
$=\frac{1}{4}\{(\vec{a}-\vec{c})+(\vec{b}-\vec{d})\}\{(\vec{a}-\vec{c})-(\vec{b}-\vec{d})\}$

$=\frac{1}{4}\{|\vec{a}-\vec{c}|^2-|\vec{b}-\vec{d}|^2\}$

$=\frac{1}{4}\{|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{BD}|^2\}$

から両辺4倍して示された◻

(2) 三角形ABCの辺長を、右のように定める。



題意から

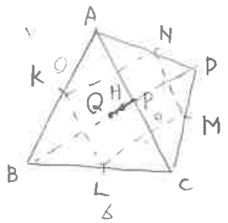
$\overline{AC}=\overline{BD}=b$
$\overline{BC}=\overline{AD}=a$
$\overline{CD}=\overline{AB}=c$

となるので、示された◻（他の場合は、全ての面が合同になることはない）

(3) 題意の時、(1)から $\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{LN}=0$ ∴ $\overrightarrow{MK}\perp\overrightarrow{LN}$ …①

中点連結定理から

$$\begin{cases}\overline{KL}=\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\sqrt{6}\\ \overline{KN}=\overline{LM}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{1}{2}\sqrt{6}\end{cases} \quad \cdots②$$

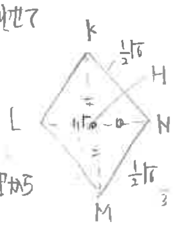


BDの中点Qとして(1)と同様にして

$\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{NL},\ \overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{KM}$ …③

又、$\vec{h}=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$ となるようにHをとると、PQ, KM, NLは全てHを中点としていて、まずK, L, M, Nは同一平面上の点で、③とあわせて

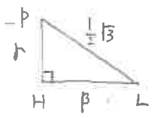
$\overrightarrow{PQ}\perp$ 平面KLMN …④

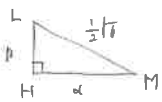


再び中点連結定理から、$\overline{PL}=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\overline{KP}=\frac{1}{2}\sqrt{5}$ で、

$\overline{KH}=\alpha$, $\overline{HL}=\beta$, $\overline{PH}=\gamma$ とおくと④及び三平方の定理から

$$\begin{cases}\beta^2+\gamma^2=\frac{3}{4}\\ \alpha^2+\beta^2=\frac{6}{4}\\ \alpha^2+\gamma^2=\frac{5}{4}\end{cases} \quad ∴ \begin{cases}\alpha=1\\ \beta=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \gamma=\frac{1}{2}\end{cases} (\alpha,\beta,\gamma>0) \quad \cdots⑤$$





である。④及び⑤から

△P-KLM $=\frac{1}{3}\cdot\overline{PH}\cdot\overline{HL}\cdot\overline{HM}$

$=\frac{1}{3}\alpha\beta\gamma=\frac{\sqrt{2}}{12}$