T.K.大数学　2005

50分

第 1 問

[解] $a_n = \int_1^e (\log x)^n dx$ …①

(1) $A_n = (\log x)^n$ とおく。$n \geq 3$ の時.

$(\text{左辺}) = \int_1^e (\log x)^{n-1} \log x \, dx$

$= \left[x(\log x - 1)(\log x)^{n-1} \right]_1^e - \int (n-1)\left((\log x)^{n-1} - (\log x)^{n-2}\right) dx$

$= (n-1)(A_{n-2} - A_{n-1}) = (\text{右辺})$ 㘴

(2) $[1, e]$ で $0 \leq \log x \leq 1$ より. …②

$0 \leq (\log x)^{n+1} \leq (\log x)^n$

同区間で積分して

$0 < a_{n+1} < a_n$ (常に②の等号が成立するわけではない)

(3) (1),(2)から $n \geq 2$ にすれ,

$a_{2n} = (2n-1)(a_{2n-2} - a_{2n-1})$

$< (2n-1)(a_{2n-2} - a_{2n})$ $(\because a_{2n} < a_{2n-1}, 2n-1 > 0)$

$2n a_{2n} < (2n-1) a_{2n-2}$

くり返し用いて

$a_{2n} < \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2(n-1)} \cdots \frac{3}{4} a_2$ …③

又.

$a_2 = \left[x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x \right]_1^e$

$= e - 2$

だから③に代入して

$a_{2n} < \frac{(2n-1)\cdots 3}{2n \cdots 6 \cdot 4}(e-2)$ #

第 2 問

[解] $f(x)=x^4+s^2x^2+t^2+2(sx^3+tx^2+stx)=x^4+2sx^3+(s^2+2t)x^2+2stx+t^2$

だから

$a=2s,\ b=s^2+2t,\ C=2st,\ d=t^2$ …①

である。又.

$s=-(\alpha+\beta),\ t=\alpha\beta$ …②

(1) α,βの期待値は共に$\frac{7}{2}$で. α,βは互いに独立だから.

$E(s)=-E(\alpha)-E(\beta)=-7$ //

$E(t)=E(\alpha)E(\beta)=\frac{49}{4}$ //

(2) $E(a)=2E(s)=-14$ // である。

1° bについて

$b=s^2+2t=(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta=\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2$ である。ここで.

$E(\alpha^2)=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}k^2=\frac{91}{6}$, $E(\beta^2)=\frac{91}{6}$

だから.

$E(b)=2E(\alpha^2)+4E(\alpha)E(\beta)=\frac{91}{3}+49=\frac{238}{3}$ //

2° Cについて

$C=2st=-2(\alpha+\beta)\alpha\beta=-2(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2)$ から

$E(c)=-2\{E(\alpha^2)E(\beta)+E(\alpha)E(\beta^2)\}$

$=-2\cdot2\cdot\frac{91}{6}\cdot\frac{7}{2}=\frac{-637}{3}$ //

3° dについて

$d=\alpha^2\beta^2$から

$E(d)=E(\alpha^2)E(\beta^2)=\left(\frac{91}{6}\right)^2=\frac{8281}{36}$ //

OK

第 3 問

[解] $C: x^2+y^2=1$

Dの中心は, $c=\cos\theta$, $s=\sin\theta$ として $P(c,s)$ $(0\leq\theta<2\pi)$ とかける。

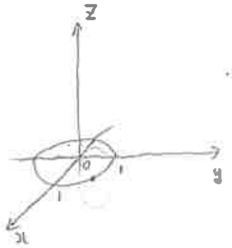
又, Dのある平面はy軸に垂直なので,

$$D: (x-c)^2+z^2=1,\ y=s$$

とかける。$y=s$ で切断する。$(0\leq\theta\leq\pi/2)$

この時のDの通過領域は斜線部で,

この面積 $V(\theta)$ とおくと

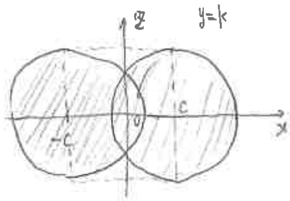


$$V(\theta)=2\pi-2\int_c^1 2\sqrt{1-x^2}\,dx$$

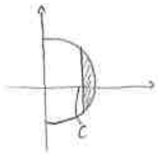
$$=2\pi-4\int_\theta^0 s(-s)\,d\alpha$$

$$=2\pi-4\left[\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}\sin2\alpha\right]_0^\theta$$

$$=2\pi+\sin2\theta-2\theta$$



したがって, もとめる体積Vは, 対称性から,



$$\frac{V}{2}=\int_0^1 V(\theta)\cdot dy$$

$$=\int_0^{\pi/2} V(\theta)\cdot\frac{dy}{d\theta}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2}(2\pi c+c\cdot\sin2\theta-c\cdot2\theta)\,d\theta \quad \text{―①}$$

ここで,

$$\int_0^{\pi/2} c\cdot\sin2\theta\,d\theta=2\int_0^{\pi/2}(sc^2)\,d\theta=\frac{2}{3}\left[-c^3\right]_0^{\pi/2}=\frac{2}{3}$$

$$\int_0^{\pi/2} c\cdot\theta\,d\theta=\left[s\cdot\theta+c\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}-1$$

$$\int_0^{\pi/2} c\,d\theta=1$$

だから, ①に代入

$$\frac{V}{2}=2\pi+\frac{2}{3}-\pi+2=\pi+\frac{8}{3}$$

$$V=2\pi+\frac{16}{3}\ //$$

01こ

第 4 問

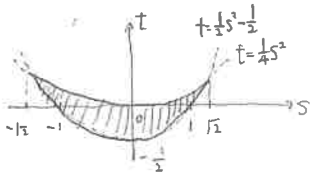
[解] (1). x, y の実数条件から

$$s^2-4t \geq 0$$

又. $x^2+y^2 = s^2-2t$ だから

$$s^2-2t \leq 1$$

図示して下図斜線部(境界含む)



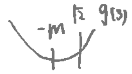
(2) $f(s,t) = t+ms$ とおく。(1)から. $\frac{1}{2}(s^2-1) \leq t \leq \frac{1}{4}s^2$ である。

s を固定するとしたがって

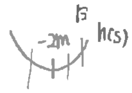
$$\frac{1}{2}(s^2-1)+ms \leq f(s,t) \leq \frac{1}{4}s^2+ms$$

左辺 $g(s)$, 右辺 $h(s)$ とおく $(-\sqrt{2} \leq s \leq \sqrt{2})$

$$g(s) = \frac{1}{2}(s+m)^2+\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{2}$$



$$h(s) = \frac{1}{4}(s+2m)^2-m^2$$



及び $0 \leq m$ から.

ア: 最小について

$-\sqrt{2} \geq -m$ の時. $\min g = g(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}m+\frac{1}{2}$

$-\sqrt{2} \leq -m$ 〃 $\min g = g(-m) = -\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{2}$

イ: 最大について

$$\max h = h(\sqrt{2}) = \sqrt{2}m+\frac{1}{2}$$

まとめて.

$$\begin{cases} \max = \sqrt{2}m+\frac{1}{2} \\ \min = \begin{cases} -\sqrt{2}m+\frac{1}{2} & (m \geq \sqrt{2}) \\ -\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{2} & (m \leq \sqrt{2}) \end{cases} \end{cases}$$

#