T. K. 数学 2004

120分

第 1 問

[解] $a, b > 0$ …①

(1) $f(x) = \dfrac{x^4}{(x-a)^3}$ は $a < x$ において正である。

$\log f(x) = 4\log x - 3\log(x-a)$

xで微分して

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{4}{x} - \frac{3}{x-a} = \frac{x-4a}{x(x-a)}$$

$$f'(x) = \frac{x^3(x-4a)}{(x-a)^4}$$

下表をうる

x	a		$4a$	
f'		$-$	0	$+$
f		↘		↗

//

(2) $g(x) = \dfrac{1}{(x-a)^2} - \dfrac{b}{x^3}$, $g'(x) = \dfrac{-2}{(x-a)^3} + \dfrac{3b}{x^4}$。$g(x) = k$ をみたす

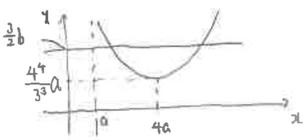
xが3つあるようなkが存在するには、$g'(x)=0$, $a<x$, 前後で$g'(x)$が符号をかえる

をみたすxが少なくとも2つあることが必要。 …＊

$g'(x) \geqq 0$

$$\frac{3b}{x^4} \geqq \frac{2}{(x-a)^3}$$

$$\frac{3}{2}b \geqq \frac{x^4}{(x-a)^3} = f(x)$$



$f(x)$のグラフの形から、＊をみたす条件は

$$\frac{4^4}{3^3}a < \frac{3}{2}b \quad \cdots ②$$

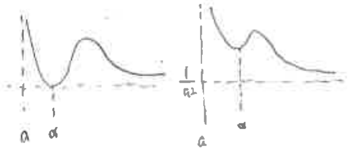
$\left(f(x) \to \infty \ (x \to +a, +\infty) \right)$

このもとで、$g'(x)=0$は2解α, β $(\alpha<\beta)$をもち、下表をうる

x	a		α		β	
g'		$-$	0	$+$	0	$-$
g		↘		↗		↘

$g(x) \to +\infty$ $(x \to +a)$, $g(x) \longrightarrow \frac{1}{a^2}$ $(x \to +\infty)$だからグラフの概形は

以下のようになる



いずれの場合も、$f(x)=k$をみたすxが3つあるようなkがあり十分。もとめる条件は

③で

$$b > \frac{2 \cdot 4^4}{3^4}a$$ //

第 2 問

[解] (1) 左辺 $= F(x)$, 右辺 $= G(x)$ とおく。$F(x)$ において、又、

$I_k = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(\sin x)\, g(\cos x)\, dx$ $(k \in \mathbb{N})$ とおく. $t = x-(k-1)\pi$ とおくと

$$I_k = \int_0^{\pi} f(\sin(t+(k-1)\pi))\, g(\cos(t+(k-1)\pi))\, dt$$

$$= \int_0^{\pi} f(\sin t)\, g(\cos t)\, dt \quad (\because f, g \text{ は偶関数})$$

k について足して

$$F(x) = G(x) \quad \text{図}$$

(2) 不等式の左辺から順に A, B, C とおく. $[0, \pi]$ で $\sin x \geqq 0$ より,

$D = \int_0^{\pi} \frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2} dx$ とおくと, $A = \frac{m}{(m+1)\pi} D$, $C = \frac{m+1}{m\pi} D$ …①

であり, $f(x) = |\sin x|$, $g(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$ として, いずれも偶関数だから.

(1)から

$$D = \frac{1}{m}\int_0^{m\pi} f(\sin x)\, g(\cos x)\, dx = \frac{1}{m+1}\int_0^{(m+1)\pi} f(\sin x)\, g(\cos x)\, dx \quad \cdots ②$$

又, $n = k\pi$, $t = nx$ として

$$B = \int_0^{k\pi} \frac{|\sin t|}{(1+\cos^2 t)^2} \frac{dt}{k\pi}$$

$$= \frac{1}{k\pi}\int_0^{k\pi} f(\sin x)\, g(\cos x)\, dx \quad \cdots ③$$

$P_t = \int_0^{t\pi} f(\sin x)\, g(\cos x)\, dx$ とおくと, $f, g \geqq 0$ から $P_t \geqq 0$ で, かつ

t について単調増加. ①②③から

$$A = \frac{1}{(m+1)\pi} P_m, \quad B = \frac{1}{k\pi} P_k, \quad C = \frac{1}{m\pi} P_{m+1}$$

で, $m \leqq k \leqq m+1$ 及び $P_m \leqq P_k \leqq P_{m+1}$ より

$$A \leqq B \leqq C \quad /\!/$$

(3) $E = \int_0^{\pi} \frac{s}{(1+c^2)^2} dx$ $(s = \sin x,\ c = \cos x)$ とおく. $t = c$ とおくと,

$$E = \int_1^{-1} \frac{1}{(1+t^2)^2}(-1)\, dt = \int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+t^2)^2} dt$$

$$= 2\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2} dt$$

$t = \tan\theta$ とおくと, $\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$, $\theta : 0 \to \pi/4$ で,

$$E = 2\int_0^{\pi/4} \frac{\cos^4\theta}{\cos^2\theta} d\theta = 2\int_0^{\pi/4} \cos^2\theta\, d\theta = 2\left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

はさみうち及び $n \to \infty$ で $m \to \infty$ から

$$A, C \longrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}$$

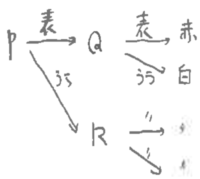
から

$$B \longrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \quad /\!/$$

ok

p, q, r

[解]



	確率	
赤	pq	…①
白	$p(1-q)$	…②
〃	$(1-p)r$	…③
〃	$(1-p)(1-r)$	…④

(1) n回のうち k回①を, $n-k$回②をえらぶカクリツは

$$ {}_nC_k (pq)^k \{p(1-q)\}^{n-k} = {}_nC_k\, p^n q^k (1-q)^k \quad /\!\!/ $$

(2) n回とも ①又は③をえらぶカクリツは, k回①, $n-k$回③をえらぶカクリツ

$$ a_k = {}_nC_k (pq)^k \{(1-p)r\}^{n-k} = (1-p)^n r^n \left(\frac{pq}{(1-p)r}\right)^k {}_nC_k $$

のkについて和で; $\alpha = \dfrac{pq}{(1-p)r}$ として

$$ \sum_{k=0}^{n} a_k = (1-p)^n r^n (1+\alpha)^n = (1-p)^n r^n \left(1 + \frac{pq}{(1-p)r}\right)^n \quad /\!\!/ $$

(3) ∵ $pq = p(1-q) = \frac{1}{4}$, $(1-p)\cdot r = \frac{1}{10}$, $(1-p)(1-r) = \frac{2}{5}$ の時, kコの赤玉を

えらぶカクリツは (2)と同様にかんがえて

$$ b_k = \underbrace{{}_nC_k}_{\text{赤玉が何回目にひくか}} \cdot \underbrace{\sum_{l=0}^{k} (pq)^l \{(1-p)r\}^{k-l}\, {}_kC_l}_{\text{赤玉の出所(①or③)}} \cdot \underbrace{\sum_{l=0}^{n-k} \{p(1-q)\}^l \{(1-p)(1-r)\}^{n-k-l}}_{\text{白玉 〃}} $$

$$ = {}_nC_k \{(1-p)r\}^k \left(1 + \frac{pq}{(1-p)r}\right)^k \{(1-p)(1-r)\}^{n-k} \left(1 + \frac{p(1-q)}{(1-p)(1-r)}\right)^{n-k} $$

$$ = {}_nC_k \left(\frac{1}{10}\right)^k \left(\frac{7}{2}\right)^k \left(\frac{2}{5}\right)^{n-k} \left(\frac{13}{8}\right)^{n-k} $$

$$ = \left(\frac{13}{20}\right)^n \left(\frac{1}{10}\,\frac{7}{2}\,\frac{5}{2}\,\frac{8}{13}\right)^k {}_nC_k $$

$$ = \left(\frac{13}{20}\right)^n \left(\frac{7}{13}\right)^k {}_nC_k $$

だから, $k = 0, 1, \cdots, 2003\ (n-1)$ に対し,

$$ \frac{b_k}{b_{k+1}} = \frac{{}_nC_k}{\left(\frac{7}{13}\right) {}_nC_{k+1}} = \frac{13}{7}\,\frac{n!}{k!(n-k)!}\,\frac{(k+1)!(n-k-1)!}{n!} $$

$$ = \frac{13}{7}\,\frac{k+1}{n-k} \equiv f(k) $$

とおくと,

$$ f(k) \geq 1 \iff 13(k+1) \geq 7(2004-k) \quad (\because k \leq 2003) $$

$$ \iff k \geq 700.75 $$

だから, $b_1 < b_2 < \cdots < b_{700} < b_{701} > b_{702} > \cdots > b_{2004}$

第 3 問

1 となり, ア.コ $/\!\!/$ ェがおこりやすい。

第 4 問

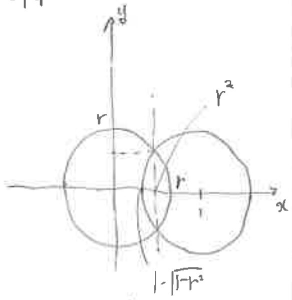
[解] 2球は $x^2+y^2+z^2=r^2$, $(x-1)^2+y^2+z^2=1-r^2$

だから、その交面は、$x=r^2$ である

(1) $V(r)$ は下の2つの図の斜線部をx軸

まわりに回転した立体をV_1, V_2として、

$$V(r) = r^3 V_1 + (1-r^2)^{\frac{3}{2}} V_2 \quad \cdots ①$$

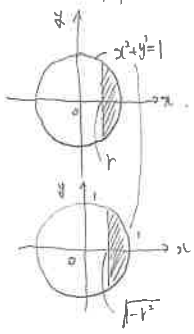


である。又、

$$\frac{V_1}{\pi} = \int_r^1 (1-x^2)\,dx = \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_r^1$$

$$= \frac{2}{3} - r + \frac{1}{3}r^3$$

$$\frac{V_2}{\pi} = \frac{2}{3} - \alpha + \frac{1}{3}\alpha^3 \quad (\alpha = \sqrt{1-r^2})$$



だから、①に代入して

$$\frac{V(r)}{\pi} = r^3\left(\frac{2}{3} - r + \frac{1}{3}r^3\right)$$

$$+ \frac{2}{3}\alpha^3 - \alpha^4 + \frac{1}{3}\alpha^6$$

$$= \frac{2}{3}r^3 - r^4 + \frac{1}{3}r^6 + \frac{2}{3}\alpha^3 - (1-r^2)^2 + \frac{1}{3}(1-r^2)^3$$

$$V(r) = \left(-r^4 + \frac{2}{3}r^3 + r^2 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right)\pi \; /\!/$$

(2) $$\frac{V'(r)}{\pi} = -4r^3 + 2r^2 + 2r + (1-r^2)^{\frac{1}{2}}(-2r)$$

$$= -2r\left[\underline{2r^2 - r - 1 + (1-r^2)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$0<r<1$ より、〰部 $f(r)$ として $V'(r)$ の符号は $-f(r)$ のそれにひとしい

$$f(r) \geq 0$$

$$(1-r^2)^{\frac{1}{2}} \geq 1 + r - 2r^2 > 0 \quad (\because 0<r<1)$$

$$1 - r^2 \geq (2r^2 - r - 1)^2 = 4r^4 - 4r^2(r+1) + (r+1)^2$$
$$= 4r^4 - 4r^3 - 3r^2 + 2r + 1$$

$$4r^4 - 4r^3 - 2r^2 + 2r \leq 0$$

$$2r(2r^3 - 2r^2 - r + 1) \leq 0$$

$$2r(r-1)(2r^2-1) \leq 0$$

より下表をうる

r	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
f'		−	0	+	
V'		+		−	
f		↗		↘	

よって、$r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ で $\max V = \left(-\frac{5}{12} + \frac{\sqrt{2}}{3}\right)\pi$ をとる。$/\!/$