T. K. 大数学 2003

第 1 問

[解] $C: y=f(x)=-x^3+ax^2+bx\ (a>0)$ と $y=mx\ (m\in\mathbb{R})$ が C と2つ共有点を持つ時，

$$x^3-ax^2+(m-b)x=0$$

が2つの異実解を持つ．

$$x\{x^2-ax+m-b\}=0 \quad \cdots①$$

から，

1° $x^2-ax+m-b=0$ が $x=0$ を解に持つ時

$m=b$ で，のこりの解は $x=a\neq0$ で良い。

2° $x^2-ax+m-b=0$ が $x\neq0$ に重解を持つ時

$a^2-4m+4b=0$ で，解は $x=\frac{a}{2}\ (\neq0)$ で良い。

以上から

$$y=bx,\ y=\left(\frac{1}{4}a^2+b\right)x \quad //\ (1)$$

(2) $\frac{1}{4}a^2>0$ から，$l_1: y=\left(\frac{1}{4}a^2+b\right)x$，$l_2: bx$ である．

l_2 と C の交点は，$x=a,\ x=0$，$\cdots②$

l_1 〃 $x=\frac{1}{2}a,\ x=0$

だから，

$$S_2=\left|\int_0^a \{bx+x^3-ax^2-bx\}dx\right|$$

$$=\left|\int_0^a (x-a)\cdot x^2\,dx\right|$$

$$=\frac{1}{12}a^4$$

$$S_1=\left|\int_0^{\frac{1}{2}a}\left\{\left(\frac{1}{4}a^2+b\right)x+x^3-ax^2-bx\right\}dx\right|$$

$$=\left|\int_0^{\frac{1}{2}a} x\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 dx\right|$$

$$=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{2}a\right)^4$$

となり，

$$S_1:S_2=1:16 \quad //$$

第 2 問

[解] n回目の操作後の図形をP_nとおく。P_nの辺比を$a_n:b_n$とする。

(1) 3回目までの操作をかき下すと右図 ($\because a>1$)

したがって、3回目で丁度おわるのは、

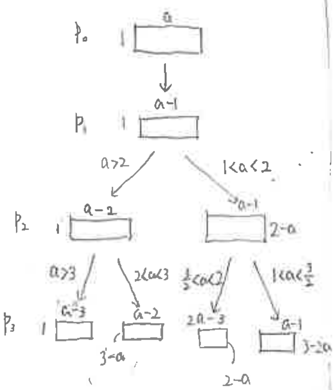
$1=a-3 \quad \therefore a=4$

$a-2=3-a \quad \therefore a=\frac{5}{2}$

$2a-3=2-a \quad \therefore a=\frac{5}{3}$

$a-1=3-2a \quad \therefore a=\frac{4}{3}$

$\therefore a=\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{2}, 4$ である。



(2) n回目の操作で丁度おわるうち、aが最大なのは、常に長さ1の辺に沿って正方形をとり除く時で、この時 $a=n+1$

aが最小なのは はじめの長さがaだった辺から、1回目を除きとり除きつづける時で、

この時、n回目の操作後の2辺比は

$a-1 : 1-(n-1)(a-1)$

これが1:1に等しい時

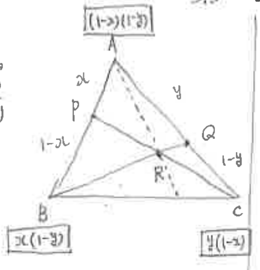
$n(a-1)=1 \quad \therefore a=1+\frac{1}{n}$

[解注] 帰納法で示しておいても良い。

[解] 点Xに対し、$\overrightarrow{AX} = \vec{x}$ と表す.

$$\vec{r} = \frac{x(1-y)+y(1-x)}{(1-x)(1-y)+x(1-y)+y(1-x)} \cdot \frac{y(1-x)\vec{c}+x(1-y)\vec{b}}{x(1-y)+y(1-x)}$$

$$= \frac{y(1-x)\vec{c}+x(1-y)\vec{b}}{1-xy}$$



たから題意の条件は，$0 \leq x < 1,\ 0 \leq y < 1$ ‥ ①から

$$\frac{y(1-x)+x(1-y)}{1-xy} \leq \frac{1}{2}$$

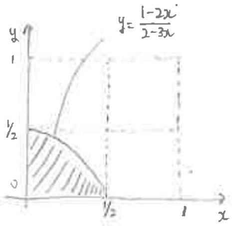
$1-xy > 0$ から

$$2(x+y-2xy) \leq 1-xy$$

$$2x+2y-3xy \leq 1$$

$$y(2-3x) \leq 1-2x \quad \cdots ②$$

①かつ②を図示して，下図斜線部(境界含む)



この面積Sは

$$S = \int_0^{1/2} \frac{1-2x}{2-3x}\,dx$$

$$= \int_0^{1/2} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3(3x-2)}\right) dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\log|3x-2|\right]_0^{1/2}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\left(\log\frac{1}{2} - \log 2\right) = \frac{1}{3} - \frac{2}{9}\log 2$$ //

第4問

[解] $\begin{cases} f_1(x)=x^2 \\ f_{n+1}(x)=f_n(x)+x^3 f_n^{(2)}(x) \end{cases}$ …①

(1) $f_n(x)$ が $n+1$ 次多項式であり、その係数が a_n とかける…◇ ことを帰納的に示す。

$n=1$ の時は $a_1=1$ として◇は成立するので、以下 $n=k$ での成立を仮定する。①から、$f_{k+1}(x)$ の最高次は $(k+1)\cdot k a_k\cdot x^{k+1}$ だから、たしかに $k+1$ 次式で、$a_{k+1}=k(k+1)a_k$ とすれば良く、$n=k+1$ でも◇は成立。よって $f_n(x)$ は $n+1$ 次式である ■

又、漸化式を繰り返し用いて、$a_n=\dfrac{(n!)^2}{n}$ //

(2) $f_n^{(k)}(0)$ $(k=1,2,3,4)$ は、$f_n^{(k)}(x)$ の定数項に等しい。$f_n(x)$ の1次～4次の項の係数を各々 b_n, c_n, d_n, e_n とおくと、

$$b_1=d_1=e_1=0,\quad c_1=1 \qquad \cdots②$$

である。①から

$$b_{n+1}=b_n,\quad c_{n+1}=c_n,\quad d_{n+1}=d_n+2c_n,\quad e_{n+1}=e_n+6d_n \qquad \cdots③$$

②、③から、

$$b_n=0,\ c_n=1,\ d_n=2(n-1),\ e_n=6(n-1)(n-2) \qquad \cdots④$$

だから、$f_n(x)=\cdots+e_nx^4+d_nx^3+c_nx^2+b_nx+A$ とおける。4回微分して

$$\begin{cases} f_n^{(1)}(x)=\cdots+2c_nx+b_n \\ f_n^{(2)}(x)=\cdots+6d_nx+2c_n \\ f_n^{(3)}(x)=\cdots+6d_n \\ f_n^{(4)}(x)=\cdots+24e_n \end{cases}$$

④から

$$f_n^{(1)}(0)=0,\ f_n^{(2)}(0)=2,\ f_n^{(3)}(0)=12(n-1),\ f_n^{(4)}(0)=144(n-1)(n-2) \ //$$