T. K. 大数学 2002

第 1 問

[解] $s=\sin x$, $c=\cos x$ とおく。$g(x)=s-ac$ とおく。$g'(x)=c+as$ だから、$[0,\frac{\pi}{4}]$ では以下のようになる。

① $a\leq 0$ の時、$g(x)\geq 0$

② $a\geq 0$ の時 $g'(x)\geq 0$ から $f(x)$ は単調増加 又 $g(0)=-a$, $g(\pi/4)=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-a)$

したがって、

1° $a\leq 0$ の時

$f(a)=\int_0^{\pi/4} g(x)dx = a\int_0^{\pi/4} -c\,dx+\int_0^{\pi/4} s\,dx$、これは a の単調減少関数。

2° $0\leq a\leq 1$ の時

$[0,\frac{\pi}{4}]$ に $g(\alpha)=0$ なる α が唯1つ存在し、$g(x)$ の原始関数の1つ $G(x)$ として

$$f(a)=-\int_0^{\alpha} g(x)dx+\int_{\alpha}^{\pi/4} g(x)dx = G(\pi/4)+G(0)-2G(\alpha) \quad \cdots ①$$

3° $1\leq a$ の時

$g(a)\leq 0$ だから、$f(a)=-\int_0^{\pi/4} g(x)dx$ で 1° と同様にこれは a の単調増加関数。

以上から、$0\leq a\leq 1$ のみしらべれば良い。$G(x)=-c-as$ として良く、

$$G(0)=-1,\ G(\pi/4)=-\frac{\sqrt{2}}{2}(a+1),\ G(\alpha)=-(\cos\alpha+a\sin\alpha) \quad \cdots ②$$

②を①に代入して

$$f(a)=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}(a+1)+2\cos\alpha+2a\sin\alpha \quad \cdots ③$$

$g(\alpha)=0$ から、$a=\tan\alpha$ ($\because 0\leq\alpha\leq\pi/4$) だから ③に代入して

$$f(a)=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}(\tan\alpha+1)+2\cos\alpha+2\tan\alpha\sin\alpha$$

$$\frac{df}{d\alpha}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\cos^2\alpha}-2\sin\alpha+2\left(\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}+\sin\alpha\right)$$

$$=\frac{4\sin\alpha-\sqrt{2}}{2\cos^2\alpha}$$

より下表をうる

a	0				1
α	0				$\pi/4$
$\sin\alpha$	0		$\sqrt{2}/4$		$\sqrt{2}/2$
f'		$-$	0	$+$	
f		↘		↗	

したがって、$f(a)$ は、$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}$ で min で、③に代入して（この時 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{14}}{4}$, $\tan\alpha=\frac{\sqrt{7}}{7}$）

$$\min f=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{\sqrt{7}}{7}\right)+\frac{\sqrt{14}}{2}+2\cdot\frac{\sqrt{7}}{7}\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{14}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-1$$

//

第 2 問

[解] $a=\pm\sqrt{17}$の時 $b=\pm 2\sqrt{2}$なら直交する。以下 $a\neq\pm\sqrt{17}$とする。この時Pから引いた接線はy軸と平行にならず、傾きmを持つので、

$$\ell : y=m(x-a)+b$$

とおける。又、Pは楕円の外部由、

$$\frac{a^2}{17}+\frac{b^2}{8}>1 \quad \cdots ①$$

である。ここで $X=\frac{x}{\sqrt{17}}$, $Y=\frac{y}{2\sqrt{2}}$ なる変換を行うと、楕円は $X^2+Y^2=1$ へ、接線 ℓ は

$$\ell' : 2\sqrt{2}Y=m(\sqrt{17}X-a)+b$$

にうつる。これらは変換後も接するので、ℓ'と(0,0)のキョリが1なので、

$$\frac{|-ma+b|}{\sqrt{17m^2+8}}=1$$

両辺0以上だから2乗して

$$a^2m^2-2abm+b^2=17m^2+8$$

$$(a^2-17)m^2-2abm+(b^2-8)=0 \quad \cdots ②$$

$a\neq\pm\sqrt{17}$から②はmの2次カンスウで、この判別式Dとして

$$\frac{D}{4}=(ab)^2-(a^2-17)(b^2-8)$$
$$=8a^2+17b^2-8\cdot 17>0 \quad (\because ①)$$

から②は2異実解を持つ。Pから引いた2接線が直交する時、したがって、

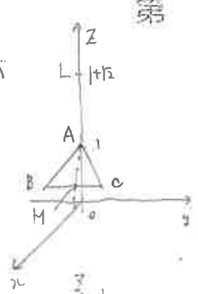
$$\frac{b^2-8}{a^2-17}=-1 \quad \therefore\ a^2+b^2=25 \quad \cdots ③$$

である。以上から、もとめるのは

$$\{(a\neq\pm\sqrt{17} \land ③) \text{ or } (a,b)=(\pm\sqrt{17},\pm\sqrt{8})\} \land ①$$

$$\Leftrightarrow ③$$

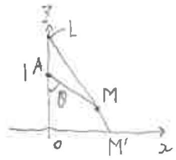
で、$a^2+b^2=25$ // である。



[解] z軸に関する対称性から、B,Cのy座標の絶対値が等しい場合をかんがえる。BCの中点Mとして、Mがxz平面の うち $x\geq 0$ にあるとする。$\angle OAM=\theta$ $(0\leq\theta\leq\pi)$とおく。この時 $\overline{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2}$から

$$\overrightarrow{OM}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix}\sin\theta\\0\\-\cos\theta\end{pmatrix}$$

とかける。$\overline{BM}=\overline{MC}=\frac{1}{2}$だから、対称性より



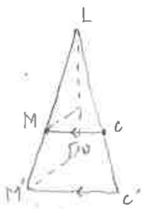
$$\begin{cases}\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}0\\1/2\\1\end{pmatrix}+\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix}s\\0\\-c\end{pmatrix}\\[2ex]\overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix}0\\-1/2\\1\end{pmatrix}+\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix}s\\0\\-c\end{pmatrix}\end{cases}\qquad\cdots①$$

として良い。ただし、$s=\sin\theta, c=\cos\theta$ である。ここでLB, LCとxy平面の交点B', C'とすると影の面積は$\triangle OB'C'$の面積Tにひとしい。LMとxy平面の交点M'とする。

相似から

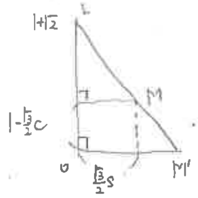
$$\overline{LM}:\overline{LM'}=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}c:\sqrt{2}+1$$

だから



$$\overline{OM'}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}c}\frac{\sqrt{3}}{2}s\qquad\cdots②$$

$$\overline{M'C'}=\overline{M'B'}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}c}\frac{1}{2}\qquad\cdots③$$



である。$OM'\perp B'C'$から②,③をあわせて、

$$T=\frac{1}{2}\overline{OM'}\times\overline{B'C'}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}c}\frac{\sqrt{3}}{2}s\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}c}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2}+1)^2\frac{s}{(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}c)^2}\qquad\cdots④$$

$f(\theta)=\dfrac{s}{(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}c)^2}$ とおく。$A=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}c$として.

$$f'(\theta)=\frac{c\cdot A^2-2A\cdot A'\cdot s}{A^4}=\frac{c(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}c)+2\frac{\sqrt{3}}{2}s^2}{A^3}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}c^2+\sqrt{2}c+\sqrt{3}}{A^3}$$

から、下表を得る

θ	0				π
c	1	+	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	−	-1
f'		↗	0	↘	
f					

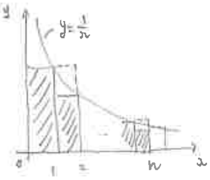
したがって、④から、Tは$\cos\theta=-\sqrt{\frac{2}{3}}$で最大。この時$\sin\theta=\sqrt{\frac{1}{3}}$だから、

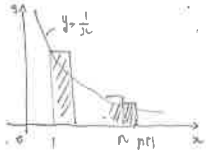
$$\max T=\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2}+1)^2\frac{\sqrt{\frac{1}{3}}}{(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2})^2}=\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)^2$$
//

第 4 問

[解] 右図で面積を比較して，$n\to\infty$ をかんがえるので n が十分大きいとして良く，

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} < 1+\int_1^n \frac{1}{x}dx & \cdots ① \\ \displaystyle\int_1^n \frac{1}{x}dx+\frac{1}{n+1} < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} & \cdots ② \end{cases}$$





①②から，

$$\log n+\frac{1}{n+1} < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} < \log n+1$$

両辺 $\log n(>0)$ でわって

$$1+\frac{1}{(n+1)\log n} < \frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} < 1+\frac{1}{\log n} \quad \cdots ③$$

③の両辺 $n\to\infty$ で 1に収束するから，はさみうちから

$$\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \quad /\!/ (1)$$

(2) $f_n(x)=\prod_{k=0}^{n}(x-k)$ とおく，

$$f_n'(x)=(x-1)\cdots(x-n)+x(x-2)\cdots(x-n)+\cdots+x(x-1)\cdots(x-(n-1))$$

で，$0\leqq k\leqq n$ なるセイスウ k に対し $f_n(k)\neq 0$ だから，$f_n'(x)=0$ の両辺 $f_n(x)$ でわって $\cdots *$

$$0=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\cdots+\frac{1}{x-n} \quad \cdots ④$$

$x=x_n$ は④をみたすので

$$\frac{1}{x_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k-x_n} \quad ■ \quad \cdots *$$

次に，$0<x_n\leqq\frac{1}{2}$ を示す．*から $x_n\neq 0$ であり，$x_n<0$ と仮定すると④で $0=$(負の数)となり不適だから，$0<x_n$ …⑤である。次に，$f_n(x)$ は連続で，

$$\begin{cases} f_n'(0)=(-1)(-2)\cdots(-n)=(-1)^n\cdot n! \\ f_n'(\frac{1}{2})=\left(\frac{1}{1/2}+\frac{1}{1/2-1}+\cdots+\frac{1}{1/2-n}\right)f_n(\frac{1}{2}) \\ \quad =\left(\frac{1}{1/2}+\cdots+\frac{1}{1/2-n}\right)\frac{1}{2}(-1)^n\prod_{k=1}^{n}(k-\frac{1}{2}) \end{cases}$$

だから，$n=1$ の時 $f_1'(0)<0$，$f_1'(\frac{1}{2})=0$ から $0<x\leqq\frac{1}{2}$ に $f_1(x)$ の極値を与える x があり，

$n\geqq 2$ の時，$f_n'(0)f_n'(\frac{1}{2})<0$ となり，$0<x\leqq\frac{1}{2}$ に $f_n'(x)=0$ なる x があるから極値を与える x がある…⑥

⑤⑥から，$0<x_n\leqq\frac{1}{2}$ である ■

(3) 及び $0<x_n\leqq\frac{1}{2}$ から，n が十分大きいとして，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} < \frac{1}{x_n} < \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}+\frac{1}{1-1/2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} < \frac{1}{x_n} < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+2-\frac{1}{n}$$

両辺 $\frac{1}{\log n}(>0)$ をかけて，

$$\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} < \frac{1}{x_n\log n} < \frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{\log n}\left(2-\frac{1}{n}\right) \quad \cdots ⑦$$

⑦の両辺は(1)から1に収束するので，はさみうちから $\frac{1}{x_n\log n}\longrightarrow 1\ (n\to\infty)$ であり，

$\frac{1}{x}$ は $0<x$ で連続だから

$$x_n\log n \longrightarrow 1 \quad /\!/ \quad (n\to\infty)$$

である．

[解2]

(2) (後半部，$0<x_n$ をみちびいた後)

$f_n(x)$ は微分カノウだから，平均値の定理から，

$$f'(c)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=0 \quad (0<c<1)$$

をみたす c があるので $0<x_n<1$ である。次に $\frac{1}{2}<x_n<1$ と仮定すると，

$$1<\frac{1}{x_n}<2,\quad 2<\frac{1}{1-x_n},\quad \frac{1}{2-x_n}>0,\ \cdots,\ \frac{1}{n-x_n}>0$$

から，*の右辺が 2より大きくなり矛盾。したがって，$0<x_n\leqq\frac{1}{2}$ である。■