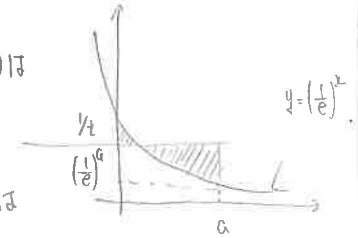
東工大数学　2001

第 1 問

[解] $S(a,t)=\int_0^a \left|\left(\frac{1}{e}\right)^x-\frac{1}{t}\right|dx$

(1) $y=\left(\frac{1}{e}\right)^x$ のグラフから.



∘ $\frac{1}{t} \geq \left(\frac{1}{e}\right)^0=1$ の時, $S(a,t)$ は $\left(\frac{1}{t}\right)$ の単調増加関数.

∘ $\frac{1}{t} < \left(\frac{1}{e}\right)^a$ の時, $S(a,t)$ は $\left(\frac{1}{t}\right)$ の単調減少関数

であり, $S(a,t)$ は明らかに連続だから, $\left(\frac{1}{e}\right)^a \leq \left(\frac{1}{t}\right) \leq 1$ で $S(a,t)$ は min をとる. この時 $\left(\frac{1}{e}\right)^\alpha=\frac{1}{t}$ ① をみたす α $(0\leq\alpha\leq a)$ が唯1つ存在し.

$$S(a,t)=\int_0^\alpha \left\{\left(\frac{1}{e}\right)^x-\frac{1}{t}\right\}dx+\int_\alpha^a \left\{\frac{1}{t}-\left(\frac{1}{e}\right)^x\right\}dx$$

ここで, $F(x)=-\left(\frac{1}{e}\right)^x-\frac{1}{t}x$ とおくと.

$$S(a,t)=2F(\alpha)-F(0)-F(a) \quad \cdots ①$$

a を固定して t で微分する

$$\frac{dS(a,t)}{dt}=2\left\{\frac{d\alpha}{dt}\cdot e^{-\alpha}-\frac{\frac{d\alpha}{dt}\cdot t-\alpha}{t^2}\right\}-\frac{a}{t^2}$$

又, ①から.

$$\frac{d\alpha}{dt}=\left(\frac{1}{e}\right)^\alpha$$

であり, $p=\left(\frac{1}{e}\right)^\alpha=\frac{1}{t}$ とおくと.

$$\frac{dS}{dt}=2\left\{p^2-(1-\alpha)p^2\right\}-a p^2$$
$$=p^2(2\alpha-a)$$

より, 下表を得る.

t	1		$e^{\frac{a}{2}}$		e^a
α	0		$a/2$		a
S'		$-$	0	$+$	
S		↘		↗	

したがって, $S(a,t)$ は $t=e^{\frac{a}{2}}$ の時, ①から

$$\min S(a,t)=2F\left(\frac{a}{2}\right)-F(0)-F(a)$$
$$=\left(\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{a}{2}}-1\right)^2 \quad //$$

(2) $\frac{m(a)}{a^2}=\frac{\left(e^{-\frac{a}{2}}-1\right)^2}{a^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{e^p-1}{p}\right)^2$ $\left(p=-\frac{a}{2}\right)$

$\longrightarrow \frac{1}{4}$ ($a\to 0$ で $p\to 0$) //

TK. 01

第 2 問

[解] 題意の範囲 Dとし、Dのうち xz 平面のものを Eとすると x, y に関する対称性から、Dは Eを z 軸を軸として回転したものである。 … ①

そこで、Eについて考える。$x=0$ に関する対称性から、$0 \le x$ について考えれば良い … ②

まず $z \le 0$ の時、$a>1$ から Eが $x^2+z^2 \le a^2$ … ③ になることは明らかである。以下 $z \ge 0$ とする。この時の Eの境界 Fとすれば、Fと x 軸で囲まれた部分が Eとなる … ④

E内の点 Qに行くには、時刻 t $(0 \le t \le 1)$ まで x 軸上を正の方向へ、そこから Qまで直線的に進めば良い。したがって、t を固定した時 $Q(X, Z)$ の行きうる範囲は、

$$(X-at)^2+Z^2=(1-t)^2$$

$$(a^2-1)t^2+(2-2aX)t+X^2+Z^2-1=0 \quad \cdots ⑤$$

をみたす。したがって、$Q(X, Z)$ の条件は、⑤をみたす t $(0 \le t \le 1)$ が存在することである。(※)

⑤の左辺 $f(t)$ とすると、$a^2-1>0$ から、$f(t)$ は2次式である。さらに

- $f(0)=X^2+Z^2-1$, $f(1)=(X-a)^2+Z^2 \ge 0$ … ⑥
- 軸：$\dfrac{aX-1}{a^2-1} \le 1$ $(\because 0 \le X \le a)$ … ⑦
- 判別式 D：$(1-aX)^2-(a^2-1)(X^2+Z^2-1)$ … ⑧

に注意すると、まず、⑦で等号成立時、すなわち $(X, Z)=(a, 0)$ は (※) をみたす。以下その他の時について考える。軸の位置で場合分けする。

1° $\dfrac{aX-1}{a^2-1} \le 0 \Leftrightarrow X \le \dfrac{1}{a}$ の時

条件は $f(0) \le 0 \Leftrightarrow X^2+Z^2 \le 1$ … ⑨

2° $0 \le \dfrac{aX-1}{a^2-1} \le 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} \le X \le a$ の時

条件は、$D \ge 0 \Leftrightarrow (X-a)^2-(a^2-1)Z^2 \ge 0$

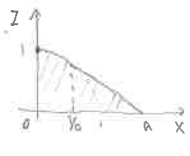
$\Leftrightarrow (X-a+\sqrt{a^2-1}Z)(X-a-\sqrt{a^2-1}Z) \ge 0$

$\Leftrightarrow X-a+\sqrt{a^2-1}Z \le 0$ $(\because X \le a, Z \ge 0)$ … ⑩

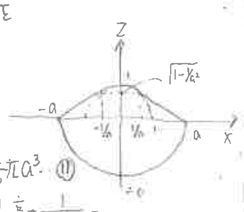
以上から：

$(※) \Leftrightarrow (X, Z)=(a, 0)$ or $\{$otherwise $\wedge$ (⑨ or ⑩)$\}$

となり、図示して右図。(斜線部 境界含む)



したがって、②、③、④から、Eを図示すると右下部斜線部である。以下①により、これを z 軸まわりに回転した体積 V をもとめる。V を、$-a \le z \le 0$ (A)、$0 \le z \le \sqrt{1-1/a^2}$ (B)、$\sqrt{1-1/a^2} \le z \le 1$ (C) に分けてもとめる。



- Aは、半径 a の半球で、体積 $V_A=\frac{4}{3}\pi a^3 \times \frac{1}{2}=\frac{2}{3}\pi a^3$ … ⑪
- Bは、底円半径 a、高さ $\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}$ の円錐から、底円半径 $\frac{1}{a}$、高さ $\frac{1}{a\sqrt{a^2-1}}$ の円錐を引いたもので、
  $$V_B=\left\{\pi a^2\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}-\pi\left(\frac{1}{a}\right)^2\frac{1}{a\sqrt{a^2-1}}\right\}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{3}\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\left(a^3-\frac{1}{a^3}\right) \quad \cdots ⑫$$
- Cは、積分により $\frac{1}{\pi}V_C=\int_{\sqrt{1-1/a^2}}^{1}(1-x^2)\,dx=\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_{\sqrt{1-1/a^2}}^{1}=\frac{2}{3}-\sqrt{1-1/a^2}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3a^2}\right)$ … ⑬

以上⑪〜⑬より

$$V=V_A+V_B+V_C$$
$$=\frac{2}{3}\pi a^3+\frac{\pi}{3}\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)+\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\pi\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3a^2}\right)$$
$$=\frac{\pi}{3}\left(2a^3+2+\frac{a^2-1}{a}\sqrt{a^2-1}\right) \quad //$$

[解注①]

⑤以下、$Z^2=-(a^2-1)t^2-2(1-aX)t+1-X^2 \equiv f(t)$ から、順手流でやると…

$f(t)$ の軸 $t=\dfrac{-1+aX}{a^2-1}$ (≤ 1) で場合分けする。この時

$$f\left(\frac{aX-1}{a^2-1}\right)=\frac{(X-a)^2}{a^2-1}$$

に注意する。minは0であることは自明なので、以下maxについてかんがえる。

1° $\dfrac{aX-1}{a^2-1} \le 0 \Leftrightarrow X \le \dfrac{1}{a}$

$0 \le Z^2 \le f(0) \Leftrightarrow 0 \le Z^2 \le 1-X^2 \Leftrightarrow 0 \le Z^2 \le 1-X^2$

2° $0 \le \dfrac{aX-1}{a^2-1} \le 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} \le X \le a$ の時

$0 \le Z^2 \le f\left(\frac{aX-1}{a^2-1}\right) \Leftrightarrow 0 \le Z^2 \le \dfrac{(X-a)^2}{a^2-1}$

だから、図示して同様の領域をうる。(以下略)

(tの値域内に軸があることを明記した方が良いかもしれない)

OK

第 3 問

[解]

(1) $P_N(1)=\frac{1}{N}$, $P_N(2)=\frac{1}{N}+\left(\frac{1}{N}\right)^2$, $P_N(3)=\left(\frac{1}{N}\right)^3+2\left(\frac{1}{N}\right)^2+\frac{1}{N}$ //

(2) 1回目に引いた札によって場合分けして、以下の漸化式を得る $(k+1\leqq N)$

$$P_N(k+1)=\frac{1}{N}\sum_{l=1}^{k}P_N(l)+\frac{1}{N} \quad \cdots ①$$

さて、$N=3$の時、和が4,5となるのは以下の時

4 ‥ (1.1.1.1) (1.1.2) (1.3) (2.2)

5 ‥ (1.1.1.1.1) (1.1.1.2) (1.1.3) (1.2.2) (2.3)

したがって、

$$P_3(4)=\left(\frac{1}{3}\right)^4+3\left(\frac{1}{3}\right)^3+2\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2$$
$$=\frac{37}{81} \text{ //}$$

$$P_3(5)=\left(\frac{1}{3}\right)^5+4\left(\frac{1}{3}\right)^4+3\left(\frac{1}{3}\right)^3+3\left(\frac{1}{3}\right)^3+2\left(\frac{1}{3}\right)^2$$
$$=\frac{121}{243} \text{ //}$$

(3) $S_k=\sum_{l=1}^{k}P_N(l)$ とおく。①から $k\geqq 2$の時

$$P_N(k+1)=\frac{1}{N}S_k+\frac{1}{N}$$
$$P_N(k)=\frac{1}{N}S_{k-1}+\frac{1}{N}$$

$$P_N(k+1)=\left(1+\frac{1}{N}\right)P_N(k)$$

$P_N(2)=\frac{1}{N}\left(1+\frac{1}{N}\right)$ (∵(1)) とあわせて、

$$P_N(k)=\left(1+\frac{1}{N}\right)^{k-2}\frac{1}{N}\left(1+\frac{1}{N}\right)$$
$$=\frac{1}{N}\left(1+\frac{1}{N}\right)^{k-1} \text{ //}$$

これはk=1でも成立。

[別]

(3) $X_j=\sum_{l=1}^{j}x_l=k$ となる時 (x_lはl番目に引いた文字)

$k\leqq N$ ならば右のようにkコの0とj−1コのしきりを

かんがえ、これらをならべる場合の数にひとしく　0|0 ‥ |0

(しきりはとなりあわず、両端にも来ない)

${}_{k-1}C_{j-1}$ 通り

だから、$X_j=k$ なるカクリツ a_j は

$$a_j=\frac{1}{N^j}\,{}_{k-1}C_{j-1}$$

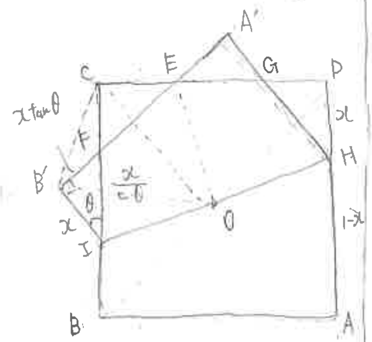
で、

$$P_N(k)=\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{N^j}\,{}_{k-1}C_{j-1}$$
$$=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{N^{j+1}}\,{}_{k-1}C_j$$
$$=\frac{1}{N}\left(1+\frac{1}{N}\right)^{k-1} \text{ //}$$

第4問

[解] 右図のように各図形量を定める (Oは□ABCDの対角線の交点) …①

$0 < x < \frac{1}{2},\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ …*



題意の面積T, △IB'Fの面積S_1, △EA'G≡△CEFの面積S_2とおくと

$$T = \frac{1}{2} - (S_1 + S_2) \quad \cdots ②$$

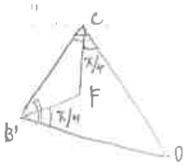
(∵ △A'EG≡△CEF)

ここで OC=OB' (∵①) から △OCB'は2等辺三角形で

$$\angle OB'C = \angle OCB' \quad \cdots ③-1$$

又

$$\angle OB'F = \angle OCF = \pi/4 \quad \cdots ③-2$$



だから③-1, ③-2より ∠B'CF=∠CB'Fとなり

△FCB'は2等辺三角形で CF=B'F。これと△IB'F∽△ECFから

$$\triangle IB'F \equiv \triangle ECF$$

従って

$$S_1 = S_2 = \frac{1}{2}x^2\tan\theta$$

だから②に代入して

$$T = \frac{1}{2} - x^2\tan\theta \quad \cdots ④$$

又 AB を2通りで表して

$$1 = x\tan\theta + \frac{x}{\cos\theta} + x$$

$$\therefore x = \frac{c}{s+c+1} \quad (c = \cos\theta,\ s = \sin\theta) \quad \cdots ⑤$$

④から Tは$x^2\tan\theta$が最大の時最小。$P = x^2\tan\theta$とおくと

$$P = \frac{sc}{(s+c+1)^2} = \frac{t^2-1}{2(t+1)^2} \quad (t = c+s)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2t+2}{(t+1)^2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{t+1}\right)$$

$1 < t \leq \sqrt{2}$ だから P は $t = \sqrt{2}$ で最大。従って

$$\min T = \frac{1}{2} - \max P$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1 \quad //$$