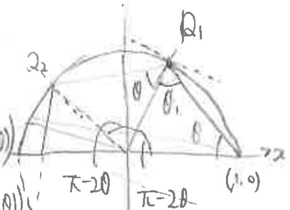
9-1

東工大 数学 2000

第1問

[解] (1) 2回目の反射がおこり，かつ3回目の反射がおこらなければ良い。k回目の反射点をQ_kとおく。

又，入射角は常にθで等しい。したがって



$Q_2(\cos(2\pi-4\theta), \sin(2\pi-4\theta))$

$Q_3(\cos 3(\pi-2\theta), \sin 3(\pi-2\theta))$

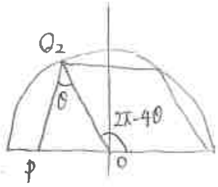
となるから条件は　　$0<\theta<\pi/2$ …①

$0<2(\pi-2\theta)<\pi<3(\pi-2\theta)$　(∵①)

∴ $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{3}$

(2) 右図で△OQ_2Pに正弦定理

$$\frac{OP}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin(2\pi-5\theta)}$$



$$OP=\frac{\sin\theta}{-\sin5\theta}$$

だから $P\left(\frac{\sin\theta}{\sin5\theta}, 0\right)$

(3) $f(\theta)=\frac{\sin\theta}{\sin5\theta}$ とおく。以下 $\sin\theta=s$, $\cos\theta=c$と書く。

$\sin5\theta=\sin(2\theta+3\theta)=\sin2\theta\cos3\theta+\sin3\theta\cos2\theta$

$=2sc(4c^3-3c)+(3s-4s^3)(1-2s^2)$

$=2s(1-4s^2)(1-s^2)+(3s-4s^3)(1-2s^2)$

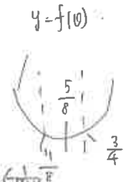
$=s(16s^4-20s^2+5)$

だから $s\neq0$から (∵ $\frac{\pi}{4}<\theta<\pi/3$)

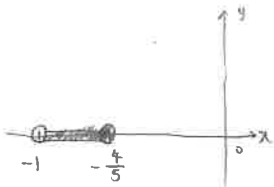
$$f(\theta)=\frac{1}{16s^4-20s^2+5},$$

$t=s^2$ $\left(\frac{1}{2}<t<\frac{3}{4}\right)$ とおく

$$f(\theta)=\frac{1}{16\left(t-\frac{5}{8}\right)^2-\frac{5}{4}}$$



より $-1<f(\theta)\leq-\frac{4}{5}$ だから右図太線部



0k

第 2 問

[解] $\cos\theta = c,\ \sin\theta = s$ と書く.

(1) $\left|z+\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2} \iff \left|\left(rc+\frac{1}{2}\right)+i\,rs\right| < \frac{1}{2}$

$\iff \left(rc+\frac{1}{2}\right)^2+(rs)^2<\frac{1}{4}$ (∵両辺0以上)

$\iff r^2+rc<0$

$\iff r+\cos\theta<0,\ r\neq 0$ (∵ $r\geq 0$)

(2) $z^{n+1}-1=(z-1)(1+z+\cdots+z^n)$ より, $z\neq 1$の時

$$\left|1+\cdots+z^n\right|^2 = \left|\frac{z^{n+1}-1}{z-1}\right|^2 = \frac{|z^{n+1}-1|^2}{|z-1|^2}$$

$$= \frac{\left(r^{n+1}\cos(n+1)\theta-1\right)^2+\left(r^{n+1}\sin(n+1)\theta\right)^2}{(rc-1)^2+(rs)^2}$$

$$= \frac{r^{2n+2}-2r^{n+1}\cos(n+1)\theta+1}{r^2-2r\cos\theta+1}$$ ($z=1$の時は$(1+n)^2$)

//

(3) $Z_n = 1+z+\cdots+z^n$ とおく.

$$r^2-2r\cos\theta+1=(r-1)^2+2r(1-\cos\theta)>0 \quad (∵ \cos\theta<0)$$

だから,

$|Z_n|<1 \iff |Z_n|^2<1$ (∵両辺0以上)

$\iff r^{2n+2}-2r^{n+1}\cos(n+1)\theta < r^2-2r\cos\theta$

$\iff r^{2n+1}-2r^{n}\cos(n+1)\theta < r-2\cos\theta$ ... ①

であることに注意する.

$r^{2n+1}-2r^{n}\cos(n+1)\theta - r+2\cos\theta$

$< r^{2n+1}-2r^{n}\cos(n+1)\theta - r-2r$ (∵ $r+\cos\theta<0$)

$=r\left(r^{2n}-2r^{n-1}\cos(n+1)\theta-3\right)$

$<r\left(r^{2n}+2r^{n-1}-3\right)$ (∵ $|\cos(n+1)\theta|\leq 1$)

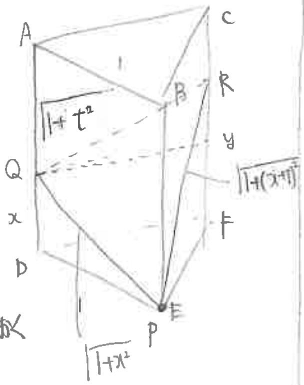
<0 (∵ $0<r<-\cos\theta$)

だから①は示された. したがって題意は示された. □

ok

第 3 問

[解] 右図のようにおく. 断面の直角三角形PQRの頂点は辺AD, BE, CF上に1つずつ存在する. 又, そのうちの1つPがEであるとして良い。対称性からQがAD上, RがCF上にある場合のみをかんがえ. $\overline{DQ}=x$, $\overline{FR}=x+t$ とおく



$(0\le x\le x+t\le 2)$ …*

最大辺は, $0<x\le x+t$ より, PRだから, $\angle PQR=\angle R$ となり.

△PQRの面積Sとして

$$S=\frac{1}{2}\overline{QP}\cdot\overline{QR}=\frac{1}{2}\sqrt{(1+x^2)(1+t^2)} \quad \cdots ①$$

又 △PQRにピタゴラスの定理を用いて

$$1+(x+t)^2=1+t^2+1+x^2$$

$$\therefore\ 2xt=1 \quad \therefore\ xt=\frac{1}{2} \quad \cdots ②$$

*, ②のもとで①の値域をもとめる. まず, x, tは pの2次方程式

$$p^2-kp+\frac{1}{2}=0 \quad (0\le k\le 2)$$

の2正実解であり, この判別式Dとして

$$D=k^2-2\ge 0 \iff \sqrt{2}\le k\le 2 \quad (\because 0\le k\le 2) \quad \cdots ③$$

ここで, $k=x+t$ である. ①から

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2t^2+(x+t)^2-2xt}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{k^2+\frac{1}{4}}$$

③から

$$\frac{3}{4}\le S\le\frac{17}{4}$$

第4問

[解] $f(x)=e^{nx}-1-e^{x}$, $t=e^{x}$ とおく。

(1) $f'(x)=nt^{n}-t=t(nt^{n-1}-1)$ より、下表を得る ($\because n\in\mathbb{N}$)

x	0	
f'		$+$
f		$\nearrow$

これと $f(0)=-1$, $f(x)\to\infty$ $(x\to+\infty)$ から $f(x)=0$ は $x>0$ に唯1つ実解を持つ。したがって、(ア)、(イ)は第1象現に唯1つ交点を持つ//

(2) $f\left(\frac{1}{n}\right)=e-1-e^{\frac{1}{n}}\leq e-1-e^{\frac{1}{2}}$ ($\because n\in\mathbb{N}_{\geq 2}$) であり、

$(1.7)^2=2.89>e$ より $e^{\frac{1}{2}}<1.7$, $e<2.7$ から $f\left(\frac{1}{n}\right)>0$. したがって

(1)から、$0<a_n<\frac{1}{n}$ だから はさみうちの定理から $a_n\to 0\ (n\to\infty)$ //

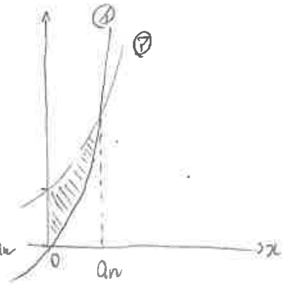
又、

$$e^{na_n}=e^{a_n}+1$$

の両辺から自然対数とって

$$na_n=\log(e^{a_n}+1)\xrightarrow{n\to\infty}\log 2\quad(\because a_n\to 0)$$ //

(3) 右図から



$$S_n=\int_0^{a_n}\{e^{x}-(e^{nx}-1)\}dx$$

$$=\left[e^{x}-\frac{1}{n}e^{nx}+x\right]_0^{a_n}$$

$$=e^{a_n}-\frac{1}{n}e^{na_n}+a_n-1+\frac{1}{n}$$

$$\therefore nS_n=n(e^{a_n}-1)+na_n+1-e^{na_n}$$

$$=na_n\frac{e^{a_n}-1}{a_n}+na_n+1-e^{na_n}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty}2\log 2+1-2=2\log 2-1\quad(\because (2))$$ //