T.K.大数学 1999

第 1 問

[解] $a, b, p > 0 \cdots ①$, $t = \frac{b}{a}$ とおく $(t>0)$. $C = A - B$ とおくと,

$$C = a^p\left[\underbrace{(1+t)^p - 2^{p-1}(1+t^p)}\right]$$

この正負は, ①から ~~~ の正負に等しい。これを $f(t)$ とおく.

$$f'(t) = p(1+t)^{p-1} - p \cdot 2^{p-1} \cdot t^{p-1}$$

$$= p\left[(1+t)^{p-1} - (2t)^{p-1}\right]$$

から, 下表をうる.

1° $0<p<1$

t	0		1	
f'		$-$	0	$+$
f		↘	0	↗

2° $p=1$

A, Bの表式から $A=B$

3° $1<p$

t	0		1	
f'		$+$	0	$-$
f		↗	0	↘

したがって,

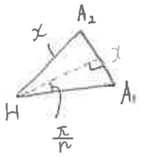
$$\begin{cases} p=1 \text{ or } a=b \text{ の時 } A=B \\ 0<p<1 \text{ かつ } a \neq b \text{ の時 } A>B \\ 1<p \text{ かつ } a \neq b \text{ の時 } A<B \end{cases}$$ //

第 2 問

〔解〕(1)頂から下ろした垂足Hとし, $\overline{A_1H}=x$とおく.$(x>0)$.

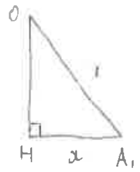
対称性から

$$T_n = n\times(\text{三角錐}\,O-HA_1A_2) \quad \cdots ①$$



である。又, $\triangle OHA_1$にピタゴラスを用いて.

$$\overline{OH}=\sqrt{1-x^2} \quad (0<x<1 \quad \cdots ②)$$



で,

$$\triangle A_1A_2H = x^2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n} \quad \cdots ③$$

だから ③から.

$$(O-HA_1A_2)=\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}\cdot x^2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n} \quad \cdots ④$$

ところで $t\sqrt{1-t}=\sqrt{t^2-t^3}$ で: $f(t)=t^2-t^3$とおくと, $f'(t)=2t-3t^2$より. $0<t<1$で表をうる.

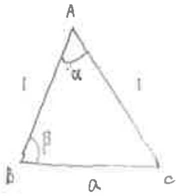
t	0		$\frac{2}{3}$		1
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

よって$f(t)$は$t=\frac{2}{3}$でmax, つまり$t\sqrt{1-t}$も$t=\frac{2}{3}$でmaxであるから, ①②④から

$$T_n=\frac{n}{3}\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{1-\frac{2}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{27}n\cdot\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n} \text{ //}$$

(2) $T_n=\frac{2\sqrt{3}}{27}\frac{n}{2\pi}\cdot\pi\sin\frac{2\pi}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2\sqrt{3}\pi}{27}$ //

[解] 右のように3頂点 A,B,C とおく。対称性から題意の2点 P,Q が、各々 AB, AC上，AB, BC上にある場合で考えれば良い。∠CAB $=\alpha$，∠ABC $=\beta$ とおく。又 $0<a<2$ …※である。



1° P,Q が AB, AC上

$\overline{AP}=x$，$\overline{AQ}=y$ とおく。△APQ が △ABC の $\frac{1}{2}$ の時，

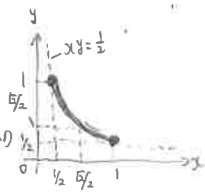
$$xy=\frac{1}{2} \quad \cdots①$$

である。余弦定理を △APQ，△ABC に用いて，

$$\begin{cases} \overline{PQ}^2 = x^2+y^2-2xy\cos\alpha \\ a^2 = 1+1-2\cos\alpha \end{cases}$$

後者から $\cos\alpha=\frac{2-a^2}{2}$ だから，前者及び①から

$$\overline{PQ}^2 = x^2+y^2-\frac{2-a^2}{2} \quad \cdots②$$



①及び $0\leq x\leq 1$，$0\leq y\leq 1$ から右図を得る。これと $x^2+y^2=k$ の交点を考えて $\min x^2+y^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1$ だから②より，

$$\min\overline{PQ}^2=\frac{a^2}{2} \quad \cdots☆$$

2° P,Q が AB, BC上

$\overline{BP}=x$，$\overline{BQ}=y$ とおく。この時 $0<x\leq 1$，$0<y\leq a$ …③である。△BPQ が △ABC の $\frac{1}{2}$ の時

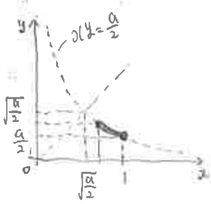
$$xy=\frac{1}{2}a \quad \cdots④$$

である。△ABC，△BPQ に余弦定理を用いて，

$$\begin{cases} \overline{PQ}^2 = x^2+y^2-2xy\cos\beta \\ 1 = 1+a^2-2a\cos\beta \end{cases}$$

後者から $\cos\beta=\frac{a}{2}$ だから，前者に代入して④とから

$$\overline{PQ}^2 = x^2+y^2-\frac{a^2}{2} \quad \cdots⑤$$



で，1°と同様に $\min x^2+y^2$ は③に注意して

- $0<a\leq\frac{1}{2}$ の時

  $a\leq\sqrt{\frac{a}{2}}$ から，$(x,y)=\left(\frac{1}{2},a\right)$ の時の $a^2+\frac{1}{4}$

- $\frac{1}{2}\leq a<2$ の時

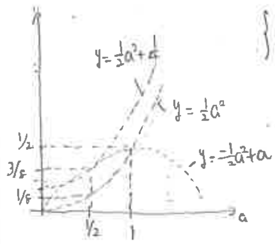
  $\sqrt{\frac{a}{2}}\leq a$ から，$(x,y)=\left(\sqrt{\frac{a}{2}},\sqrt{\frac{a}{2}}\right)$ の時の a

だから⑤に代入して

$$\min\overline{PQ}^2 = \begin{cases} \frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4} & \left(0<a\leq\frac{1}{2}\right) \\ -\frac{1}{2}a^2+a & \left(\frac{1}{2}\leq a<2\right) \end{cases} \quad \cdots☆$$

である。

☆のグラフは右上だから，もとめる $\min\overline{PQ}$ は，右上のようになる。$(\because \overline{PQ}>0)$



$$\begin{cases} 0<a\leq 1 \text{ の時} & \min\overline{PQ}=\frac{\sqrt{2}}{2}a \\ 1\leq a<2 \text{ の時} & \min\overline{PQ}=\sqrt{-\frac{1}{2}a^2+a} \end{cases}$$

//

第4問

[解] $a_n=\int_0^1 t^{2n-1}\cdot e^t dt,\ b_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{{}_{2n-1}P_{2n-2k}}{2k+1}$ とおく。

$$a_n+e\,b_n=(2n-1)! \quad \cdots \Diamond$$

を帰納的に示す。$n=2$の時について.

$$a_2=\int_0^1 t^3\cdot e^t dt=\left[e^t\cdot(t^3-3t^2+6t-6)\right]_0^1=6-2e$$

$$b_2=\frac{1}{3}\,{}_3P_2=\frac{1}{3}\cdot 3\cdot 2=2$$

だから,

$$a_2+e\,b_2=6=3!$$

となり$\Diamond$は成立。以下. $n=i\in\mathbb{N}_{\geq 2}$での成立を仮定する.

$$\circ\ a_{i+1}=\int_0^1 t^{2i+1}e^t dt=\left[t^{2i+1}\cdot e^t\right]_0^1-(2i+1)\int_0^1 t^{2i}\cdot e^t dt$$

$$=e-(2i+1)\left\{\left[t^{2i}\cdot e^t\right]_0^1-2i\,a_i\right\}$$

$$=-2ie+(2i+1)\cdot(2i)\cdot a_i \quad \cdots ①$$

である。又,

$${}_{2i-1}P_{2i-2k}=\frac{(2i-1)!}{(2k-1)!}$$

だから

$${}_{2i+1}P_{2i+2-2k}=\frac{(2i+1)!}{(2k-1)!}=(2i+1)(2i)\,{}_{2i-1}P_{2i-2k}$$

となり

$$\bullet\ b_{i+1}=(2i+1)(2i)\sum_{k=1}^{i}\frac{{}_{2i-1}P_{2i-2k}}{2k+1}$$

$$=(2i+1)\cdot 2i\left(\frac{{}_{2i-1}P_0}{2i+1}+b_i\right)$$

$$=2i+(2i+1)\cdot 2i\cdot b_i \quad \cdots ②$$

だから ①.②から

$$a_{i+1}+b_{i+1}\cdot e=(2i+1)(2i)(a_i+e\,b_i)+2ei-2ei$$

$$=(2i+1)(2i)\cdot(2i-1)! \quad (\because 仮定)$$

$$=(2i+1)!$$

より, $n=i+1$でも$\Diamond$は成立。以上から示された□

[解2]

$$b_n=(2n-1)!\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2k+1}\frac{1}{(2k-1)!}$$

$$=(2n-1)!\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2k}{(2k+1)!}$$

$$=(2n-1)!\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{1}{(2k)!}-\frac{1}{(2k+1)!}\right\}$$

だから

$$\Diamond\Leftrightarrow\frac{a_n}{(2n-1)!}+e\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{1}{(2k)!}-\frac{1}{(2k+1)!}\right\}=1 \quad \cdots ③$$

である。①から.

$$\frac{a_{n+1}}{(2n+1)!}=\frac{a_n}{(2n-1)!}-\frac{2n}{(2n+1)!}e$$

$$=\frac{a_n}{(2n-1)!}-e\left\{\frac{1}{(2n)!}-\frac{1}{(2n+1)!}\right\}$$

だから. くり返し用いて $n\geq 2$の時

$$\frac{a_n}{(2n-1)!}=-e\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{1}{(2k)!}-\frac{1}{(2k+1)!}\right\}+a_1$$

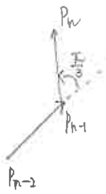
だから. $a_1=1$とあわせて③は示された□

第 5 問

[解] $e(\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$ とおく。

(1) $(x_0,y_0)=(0,0)$, $(x_1,y_1)=(1,1)$ …① である。

題意から、$\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$ を表す複素数を α_n として



$$\alpha_{n+1}=\frac{2}{3}e\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\alpha_n \quad \cdots②$$

だから、①より $\alpha_1=1+i$ であることとあわせて ②をくり返し用いて、

$$\alpha_n=\left\{\frac{2}{3}e\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{n-1}(1+i)$$

だから、

$$\overrightarrow{OP_n}=\overrightarrow{OP_0}+\overrightarrow{\alpha_1}+\cdots+\overrightarrow{\alpha_n}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2}{3}e\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{k-1}(1+i)$$

$$=(1+i)\frac{1-\left\{\frac{2}{3}e\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{n}}{1-\frac{2}{3}e\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1+i}{1-\frac{2}{3}e\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{1+i}{\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}i}=\frac{3(1+i)}{2-\sqrt{3}i}=\frac{3}{7}\left\{(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})i\right\}$$

//

(2) (1)と同様に、β_n を $\overrightarrow{Q_{n-1}Q_n}$ を表す複素数とする。$\beta_1=z$ であり、

$$\beta_{n+1}=\frac{1}{2}e\left(\frac{\pi}{6}\right)\beta_n$$

くり返し用いて

$$\beta_n=\left\{\frac{1}{2}e\left(\frac{\pi}{6}\right)\right\}^{n-1}z$$

だから、

$$\overrightarrow{OQ_n}=\sum_{k=1}^{n}\beta_k$$

$$=z\,\frac{1-\left\{\frac{1}{2}e\left(\frac{\pi}{6}\right)\right\}^{n}}{1-\frac{1}{2}e\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty}z\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}e\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{4z}{(4-\sqrt{3})-i}$$

だから (1)から

$$\frac{4z}{(4-\sqrt{3})-i}=\frac{3}{7}\left\{(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})i\right\}$$

$$z=\frac{3}{28}\left\{(13-5\sqrt{3})+3(1+\sqrt{3})i\right\}$$

//