T. K. 大数学 1998

TK. 1998 ok

第　問

[解] $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x+3y \leq 12 \\ ax+(4-\frac{3}{2}a)y \leq 8 \quad (a>0) \end{cases}$ …✱

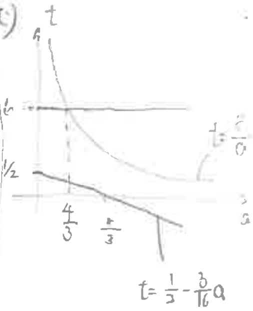
✱を図示すると、下図斜線部(境界含む)

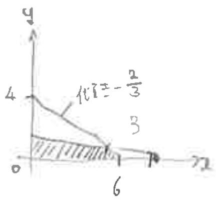
$ax+(4-\frac{3}{2}a)y=8$ の傾きは $(a \neq \frac{8}{3})$

$A = \dfrac{-a}{4-\frac{3}{2}a} = \dfrac{a}{6a-8}$ で $\frac{4}{3} \leq a$ のとき

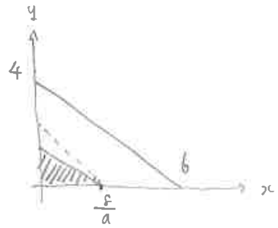
$A \geq -1 \Leftrightarrow a \geq \frac{8}{7}$, つまり $\frac{4}{3} \leq a$ のとき

常に $A \geq -1$

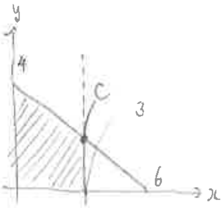




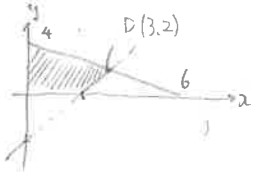
1° $0<a \leq \frac{4}{3}$



2° $\frac{4}{3} \leq a < \frac{8}{3}$



3° $a=\frac{8}{3}$



4° $\frac{8}{3}<a$

1°の時. $f(a)$ は $x=6, y=0$ の時の $f(a)=6$

2°の時 $f(a)$ は $x=\frac{8}{a}, y=0$ のときの $f(a)=\frac{8}{a}$

3°の時. $f(a)$ は $x=3, y=2$ のときの $f(a)=5$

4°の時. $f(a)$ は $x=3, y=2$ 〃 $f(a)=5$

/20

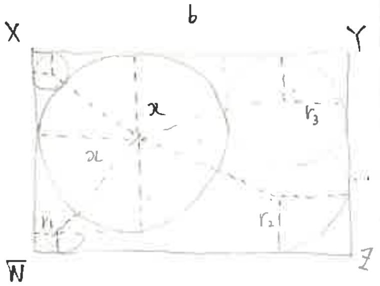
第 2 問

[解] Rの4頂点XYZWとし、AがXY, XWでRと接しているとして良い。

Aの半径xとすると

$0<x<\frac{a}{2}$ …①である

又、$0<a<b<2a$ …☆である。



(1) 題意の4円のうち、XY, XWで接するものは必ず存在するから他の3円の存在条件をしらべる。円C_kの半径r_kとすると、

$0<r_k<\frac{a}{2}$ をみたす $r_k(k=1,2,3)$の存在条件をしらべれば良い。…※

対称性から C_1がXW, WZで、C_2がWZ, ZYで、C_3がZY, YXでそれぞれRと接しているとして良い。及びAと接する条件から

$$\begin{cases}(x-r_1)^2+(a-r_1-x)^2=(x+r_1)^2\\(b-x-r_2)^2+(a-r_2-x)^2=(x+r_2)^2\\(b-x-r_3)^2+(x-r_3)^2=(x+r_3)^2\end{cases}\quad \cdots ☆$$

$x, r_k>0,\ a-x-r_1>0,\ b-x-r_3>0$ から

$$\begin{cases}a=x+r_1+2\sqrt{xr_1} & \cdots ②\\ b=x+r_3+2\sqrt{xr_3} & \\ (r_2+x)^2-2(a+b)(r_2+x)+a^2+b^2=0 & \cdots ③\end{cases}$$

$② \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{r_1}=\sqrt{a}-\sqrt{x}\\ \sqrt{r_3}=\sqrt{b}-\sqrt{x}\end{cases}$ であり、これと※をみたすr_kが存在する条件は

①から

$$\sqrt{a}-\sqrt{x}<\sqrt{\tfrac{a}{2}} \wedge \sqrt{b}-\sqrt{x}<\sqrt{\tfrac{a}{2}}$$

$$\therefore\ x>\left(\sqrt{b}-\sqrt{a/2}\right)^2$$

又、☆より、③と※をみたすr_2は必ず存在する　以上から

$$\left(\sqrt{b}-\sqrt{\tfrac{a}{2}}\right)^2<x<\frac{a}{2}\ \#$$

(2) (1)から、まず〜の円の半径r_4として

$$(x+r_4)^2=2(x-r_4)^2$$

$$\therefore\ r_4=(3-2\sqrt{2})x$$

②③から

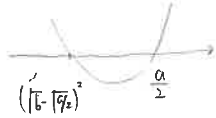
$$r_1=(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2$$
$$r_3=(\sqrt{b}-\sqrt{x})^2$$
$$r_2=a+b-\sqrt{2ab}-x\quad(\text{複号正は①に反する})$$

①,☆から、$r_3, r_2>r_1>r_4$ だから、BはC_2又はC_3であり

$$\begin{aligned}r_3-r_2&=b+x-2\sqrt{bx}-a-b+x+\sqrt{2ab}\\&=2x-2\sqrt{bx}+\sqrt{2ab}-a\\&=2\left(\sqrt{x}-\frac{\sqrt{2a}}{2}\right)\left(\sqrt{x}-\frac{2\sqrt{b}-\sqrt{2a}}{2}\right)\end{aligned}$$

より、(1)の区間内では $r_3-r_2<0$ ∴ $r_3<r_2$ だから Bはr_3.

従って、AとBの面積和Sとして



$$\begin{aligned}S&=\pi(x^2+r_3^2)\\&=\pi\left(x^2+(\sqrt{b}-\sqrt{x})^4\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dx}&=\pi\left(2x+4(\sqrt{x}-\sqrt{b})^3\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\\&=\pi\left(2X^2+2\frac{X^3-3\sqrt{b}X^2+3bX-b\sqrt{b}}{X}\right)\quad(X=\sqrt{x})\\&=\frac{4\pi}{X}\left(X-\frac{\sqrt{b}}{2}\right)\left(X^2-\sqrt{b}X+b\right)\\&=\frac{4\pi}{X}\left(X-\frac{\sqrt{b}}{2}\right)\left\{\left(X-\frac{\sqrt{b}}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b\right\}\end{aligned}$$

以下表を得る

x	$(\sqrt{b}-\sqrt{\frac{a}{2}})^2$		$\frac{\sqrt{b}}{2}$		$\frac{a}{2}$
S'		−	0	+	
S		↘		↗	

したがって $x=\frac{b}{4}$のとき $\min S=\frac{b^2}{8}\pi$ #

/20

第 3 問

[解]

(1) $f_{n+1}(x)=\dfrac{2f_n(x)-1}{f_n(x)}$ が帰納的に定義できる条件は、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $f_n(x)\neq 0$ であること。$f_{n+1}(x)\equiv\dfrac{p}{p+1}\ (p\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$ $\Leftrightarrow f_n(x)\equiv\dfrac{p+1}{p+2}$ であることに気付けて、$f_n(t)\equiv 0\Leftrightarrow t=\dfrac{n}{n+1}$ であることを帰納的に示す。…①

$n=0$ の時は明らかに成立するので、$n=k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ での成立を仮定し、$n=k+1$ での成立を示す。

$f_{k+1}(t)\equiv 0$ の時、$f_1(t)=t'$ として数列を書き直すと仮定から

$t'=\dfrac{k}{k+1}$ だから、※より

$$f_{k+1}(t)\equiv 0\Leftrightarrow t=\frac{k+1}{k+2}$$

以上から $n=k+1$ での成立が示されたから、①は示された。□

従って、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $f_n(x)\neq 0$ なる条件は $t\neq\dfrac{n}{n+1}\ (n\in\mathbb{N})$ …答

(2) $g_n(t)=f_n(t)-1$ とおく。漸化式から

$$g_{n+1}(t)=\frac{g_n(t)}{g_n(t)+1}\quad\cdots②$$

$g_0(t)=t-1$, $g_k(t)=\dfrac{t-1}{k(t-1)+1}$ と仮定すると②から

$$g_{k+1}(t)=\frac{t-1}{(k+1)(t-1)+1}$$

したがって帰納的に $g_n(t)=\dfrac{t-1}{n(t-1)+1}=-\dfrac{1}{n^2(t-1)+n}+\dfrac{1}{n}$

である。$A_n=n^2\displaystyle\int_a^{a+\frac{1}{n}}g_n(t)\,dt$ とおく

$$A_n=n^2\left[\frac{1}{n}t-\frac{1}{n^2}\log\left(t+\frac{1}{n}-1\right)\right]_a^{a+\frac{1}{n}}$$

$$=1-\log\left(a+\frac{2}{n}-1\right)+\log\left(a+\frac{1}{n}-1\right)$$

だから

$a\neq 1$ の時、$A_n\to 1\ (n\to\infty)$

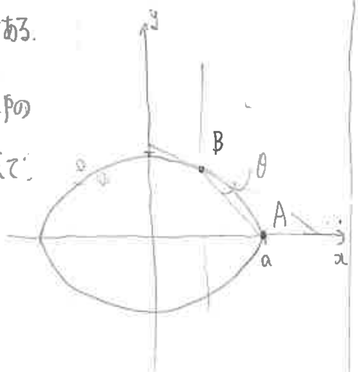
$a=1$ のとき $A_n\to 1+\log\frac{1}{2}=1-\log 2\ (n\to\infty)$ …答

/20

ok

第 4 問

[解] $l: \frac{p}{a^2}x + qy = 1$ である.

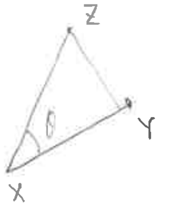


BAとlのなす角α, lと$x=p$のなす角βとおく。BはC上の点で

B(ac, s)とおける

$(c=\cos\theta,\ s=\sin\theta,\ 0<\theta<\pi)$

$$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} a(1-c) \\ -s \end{pmatrix}$$



lの方向ベクトル$\vec{l}$として

$$\vec{l} = \begin{pmatrix} -as \\ c \end{pmatrix}$$

$x=p$の方向ベクトルは$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

ここで右図のような$\triangle XYZ$において

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{XY\cdot XZ\sin\theta}{XY\cdot XZ\cos\theta} = \frac{2\triangle XYZ}{\overrightarrow{XY}\cdot\overrightarrow{XZ}}$$

だから. $a>0$, $s>0$ より

$$\tan\alpha = \frac{|ac(1-c) - as^2|}{-a^2s(1-c) - sc} = \frac{a|c-1|}{-s[(1-a^2)c+a^2]}$$

$$\tan\beta = \frac{as}{c}$$

$\alpha=\beta$の時. $\tan\alpha = \tan\beta$ より

$$\frac{a|c-1|}{-s\{(1-a^2)c+a^2\}} = \frac{as}{c} \quad \cdots ①$$

$1-c>0$, $a>0$から

$$ac(1-c) = -a(1-c^2)\{(1-a^2)c+a^2\}$$

$$0 = c + (1+c)\{(1-a^2)c+a^2\}$$

$$(1-a^2)c^2+2c+a^2=0$$

$$(a^2-1)c^2-2c-a^2=0$$

$$c=\frac{1\pm\sqrt{1+a^2(a^2-1)}}{a^2-1}$$

①から$c<0$だから複号負を採用し

$$c=\frac{1-\sqrt{1+a^2(a^2-1)}}{a^2-1}$$

(1) $p = ac = \dfrac{a[1-\sqrt{1+a^2(a^2-1)}]}{a^2-1}$

(2) $p = a\dfrac{-a^2(a^2-1)}{a^2-1}\cdot\dfrac{1}{1+\sqrt{a^2(a^2-1)+1}} \longrightarrow -\dfrac{1}{2}\ (a\to1)$

$\dfrac{p}{a} = \dfrac{1/a^2-\sqrt{1/a^4+1(1-1/a^2)}}{1-1/a^2} \longrightarrow -1\ (a\to\infty)$

/20