東工大 数学 1997

Dk

第 1 問

[解] 1° $(a,b)=(0,0)$ の時

題意は成立

2° $a=0,\ b\neq 0$ の時

$b^2y^2\leq 1$ をみたす (x,y) は, x に任意, $|y|\leq\left|\frac{1}{b}\right|$ であり,

$1\leq b$ であれば良い

3° $a\neq 0,\ b=0$

2° と同様に $1\leq a$ であれば良い.

以下. $ab\neq 0$ のもとで考える. この時. xy 平面上で $a^2x^2+b^2y^2\leq 1$ の

グラフ上の点が $a(x-1)+b(y-1)\leq 0$ * をみたすような (a,b) の範囲を

もとめれば良い. $(x,y)=\left(\frac{r}{a}c,\ \frac{r}{b}s\right)$ $(c=\cos\theta,\ S=\sin\theta,\ 0\leq\theta<2\pi,\ 0\leq r\leq 1)$

とおける. * に代入して

$$rc-a+rS-b\leq 0$$

$$r\sqrt{2}\sin(\theta+\pi/4)\leq a+b$$

が任意の r,θ で成立すればよく その条件は

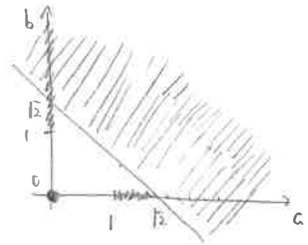
$$a+b\geq\sqrt{2}$$

以上まとめて.

$$a=b=0 \text{ or } (ab\neq 0 \wedge a+b\geq\sqrt{2})$$

$$\text{or } (a=0 \wedge b\geq 1) \text{ or } (b=0 \wedge a\geq 1)$$ //

図示して下図斜線部 (境界, ● を含む)



[別] 同様に $a\neq 0,\ b\neq 0$ で考える. $X=ax,\ Y=by$ とおく.

$X^2+Y^2\leq 1$ をみたす全ての X,Y が $X+Y\leq a+b$ をみたせば良く

$a+b\geq\sqrt{2}$ である

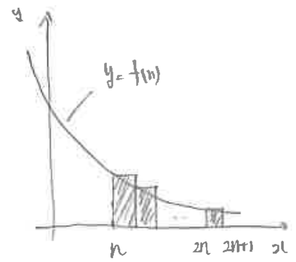
[別2]

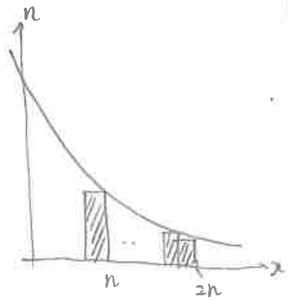
p1c

第 2 問

[解] $y=f(x)=\dfrac{1}{x+a}$ $(a\geq 0)$ のグラフは下図で、斜線部は

$S_n=\displaystyle\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{a+k}$ の面積である





面積比較して

$$\int_n^{2n} f(x)dx+\frac{1}{a+2n}<S_n<\int_n^{2n} f(x)dx+\frac{1}{a+n} \cdots ①$$

$\displaystyle\int_n^{2n} f(x)dx=\Big[\log(x+a)\Big]_n^{2n}=\log\frac{2n+a}{n+a}=\log 2+\log\frac{1+a/2n}{1+a/n}$ だ

から、①の最左右辺は共に $\log 2$ に収束するので、はさみうちの

定理から

$$S_n\to\log 2 \quad /\!/ \ (1)$$

これは a によらない 図 (2)

第 3 問

[解] (1) $xy-2x-2y=0$

$\therefore (x-2)(y-2)=4$

対称性から $x \geqq y$ とすると、$x, y \in \mathbb{N}$ から $x-2 \geqq y-2 \geqq -1$,

$x-2,\ y-2 \in \mathbb{N}$ だから

$(x-2, y-2) = (4,1)\ (2,2)$

$(x, y) = (6,3)\ (4,4)$

$x \leqq y$ の場合もかんがえて

$(x, y) = (6,3)\ (3,6)\ (4,4)$ //

(2) まず $x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n$ とする。$n=1$ では明らかで、以下 $n=i$ での成立を仮定し、$n=i+1$ での成立を示す $(i \in \mathbb{N})$

$$r = \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_{i+1}} \leqq \frac{i+1}{x_{i+1}}$$

$$\therefore x_{i+1} \leqq \frac{i+1}{r}$$

これをみたす最大の自然数 N とし、x_{i+1} の値で場合分けして $(x_1, x_2, \cdots, x_i, x_{i+1})$ の組をかぞえあげると、高々 …☆

$$\sum_{l=1}^{N} a_i\left(r - \frac{1}{l}\right)$$

とおける。ここで $a_i(r)$ は $n=i$ の時の $\sum_{k=1}^{i} \frac{1}{x_k} = r$ をみたす $(x_1, \cdots, x_i)$ の組の数であり、仮定から $a_i\left(r-\frac{1}{l}\right)$ は有限。

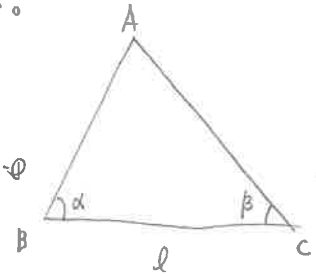
したがって $n=i+1$ でも成立。

以上から $x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n$ では有限個だから、この条件をはずしても高々 (有限) $\times\, n!$ 通りで、有限である ∎

(☆ 一応、条件が $l \leqq x_{i+1} \leqq \cdots \leqq x_1$ となっているので)

第4問

[解] (1) 右のように各点をおく。

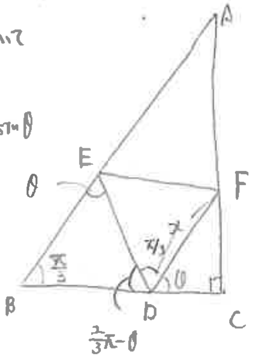


正弦定理から、

$$\frac{AB}{\sin\beta} = \frac{AC}{\sin\alpha} = \frac{l}{\sin(\alpha+\beta)} \quad \cdots ①$$

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin(\alpha+\beta)$$
$$= \frac{1}{2} \frac{l\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \cdot \frac{l\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \cdot \sin(\alpha+\beta) \quad (\because ①)$$
$$= \frac{l^2}{2} \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$
$$= \frac{l^2}{4} \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} \quad \square$$

(2) 右のようにおく $(0<x<1,\ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2})$



△CDF, △BDEに正弦定理を用いて

$$BD = \frac{x}{\sin\frac{\pi}{3}} \cdot \sin\theta = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,x\sin\theta$$

$$CD = x\cos\theta$$

BD+CD=1 から

$$\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta\right)\cdot x = 1 \quad \cdots ①$$

以下 $s=\sin\theta$, $c=\cos\theta$ と書く。△DEFの面積Tとすると、

$T=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ であり、①と $0\leq x\leq 1$ から

$$1 \leq \frac{2}{3}\sqrt{3}s + c = \sqrt{\frac{7}{3}}\sin(\theta+\alpha) \leq \sqrt{\frac{7}{3}} \quad (\because 0\leq\theta\leq\pi/2)$$

(ただし、αは $\sin\alpha=\sqrt{\frac{3}{7}}$, $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{7}}$ をみたす角) である。このもとで

①とあわせて

$$\sqrt{\frac{3}{7}} \leq x \leq 1$$

だから、Tの表式から、Tは $x=\sqrt{\frac{3}{7}}$ で最小値 $\frac{3\sqrt{3}}{28}$ をとる。