東工大 数学 1996

第　問

[解] (1) $n=2$の時

$$x_1+x_2=x_1x_2$$
$$(x_1-1)(x_2-1)=1$$

$x_1-1\geq 0,\ x_2-1\geq 0\in\mathbb{Z}$から

$$(x_1-1,x_2-1)=(1,1)\qquad\therefore\ (x_1,x_2)=(2,2)_{//}$$

$n=3$の時

$$x_1+x_2+x_3=x_1x_2x_3\quad\cdots①$$

対称性からまず$x_1\geq x_2\geq x_3$とすると

$$x_1x_2x_3\leq 3x_1$$
$$x_2x_3\leq 3$$

これをみたす組をかんがえて

$$(x_2,x_3)=(1,1)\ (2,1)\ (3,1)$$

このうち①をみたすのは$(x_1,x_2,x_3)=(3,2,1)$だから

$$(x_1,x_2,x_3)=(1,2,3)\ (1,3,2)\ (2,1,3)\ (2,3,1)$$
$$(3,1,2)\ (3,2,1)_{//}$$

(2) $n\geq 3$とする. $(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(n,2,1,\cdots,1)$は解の1つだから.
これをならびかえた${}_nP_2=n(n-1)$通りも解. したがって.
(1)とあわせて. 解が1つ以上なのは$n=2_{//}$の時

(3) (2)から任意のnに対し解は少なくとも1つ存在する//
次に後半を示す. まず$x_1\geq x_2\geq\cdots$の時をかんがえる.

$$x_1x_2\cdots x_n\leq nx_1$$
$$x_2\cdots x_n\leq n$$

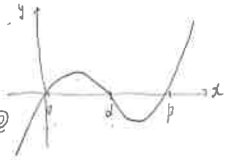
だから. $x_2\leq n$が必要で. $(x_2,\cdots,x_n)$の組は高々n^{n-1}しか
ない. $x_1x_2\cdots x_n=x_1+\cdots+x_n$は$x_1$の1次方程式だから
定まった$(x_2,\cdots,x_n)$に対しx_1は高々1通りしかない。
したがって$x_1\geq x_2\geq\cdots$以外の時もかんがえて解は
高々$n^{n-1}\cdot n!$通りしかない. したがって有限である//

第 2 問

T.K. 96 [3]

第 3 問

[解] (1) $0<\alpha<\beta$ の時. グラフの概形は右図 ($p\neq 0$ …①)



又. $f'(x)=7px^6(x-\alpha)(x-\beta)+px^7(2x-\alpha-\beta)$

$=px^6\{9x^2-8(\alpha+\beta)x+7\alpha\beta\}$ …②

である。$f'(1)=0$ から②に代入して

$$p(9-8(\alpha+\beta)+7\alpha\beta)=0$$

$p\neq 0$ から

$$9-8(\alpha+\beta)+7\alpha\beta=0 \quad \cdots ③$$

$f(1)=1$ から.

$$p(1-\alpha)(1-\beta)=1 \quad \cdots ④$$

題意から $\int_0^\beta f(x)\,dx=0$ で:

$$\int_0^\beta f(x)\,dx = p\int_0^\beta\{x^9-(\alpha+\beta)x^8+\alpha\beta x^7\}dx = p\left[\frac{1}{10}x^{10}-\frac{1}{9}(\alpha+\beta)x^9+\frac{\alpha\beta}{8}x^8\right]_0^\beta$$

$$=p\left(\frac{1}{10}\beta^{10}-\frac{1}{9}(\alpha+\beta)\beta^9+\frac{\alpha\beta}{8}\beta^8\right)=0$$

$p\beta\neq 0$ から

$$\frac{1}{10}\beta-\frac{1}{9}(\alpha+\beta)+\frac{1}{8}\alpha=0 \quad \therefore \beta=\frac{90}{72}\alpha=\frac{5}{4}\alpha \quad ⑤$$

⑤を③に代入して.

$$(5\alpha-6)(7\alpha-6)=0 \qquad \therefore (\alpha,\beta)=\left(\frac{6}{5},\frac{3}{2}\right)\ \left(\frac{6}{7},\frac{15}{14}\right)$$

④から. 順に $p=10,98$ である。以上から

$$(\alpha,\beta,p)=\left(\frac{6}{5},\frac{3}{2},10\right)_{⑥}.\ \left(\frac{6}{7},\frac{15}{14},-98\right)_{⑦}$$

が必要。逆にこの時, $x=1$ で極大値1をとることを確認する。

⑥の時

$f'(x)=px^6\left(9x^2-\frac{108}{5}x+\frac{63}{5}\right)=\frac{9}{5}px^6(5x-7)(x-1)$ から下表をうる。

x		0		1		7/5	
f'	+	0	+	0	−	0	+
f	↗		↗		↘		↗

上図から, 十分。

⑦の時

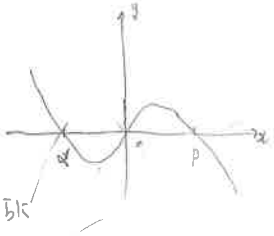
$f'(x)=px^6\left\{9x^2-\frac{108}{7}x+\frac{45}{7}\right\}=\frac{9}{7}px^6(7x-5)(x-1)$ から下表をうる。

x		0		5/7		1	
f'	−	0	−		+		−
f	↘		↘		↗		↘

上図から十分。

以上から. もとめるのは $f(x)=10x^7\left(x-\frac{6}{5}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right),\ -98x^7\left(x-\frac{6}{7}\right)\left(x-\frac{15}{14}\right)$ //

(2) $\alpha<0<\beta$ の時. グラフは右図 ($p\neq 0$) で:



$x=1$ で極大なことから.

$$p<0,\ 0<\beta<1 \quad \cdots ⑧$$

が必要である。題意から, ③④は成立し, さらに

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=0$$

$$\left[\frac{1}{10}x^{10}-\frac{1}{9}(\alpha+\beta)x^9+\frac{\alpha\beta}{8}x^8\right]_\alpha^\beta=0 \quad (\because ⑧)$$

$$\frac{1}{10}(\beta^{10}-\alpha^{10})-\frac{1}{9}(\alpha+\beta)(\beta^9-\alpha^9)+\frac{\alpha\beta}{8}(\beta^8-\alpha^8)=0$$

$t=\frac{\alpha}{\beta}$ とおく ($t<0$) と

$$-4t^{10}+4+5t^9-5t=0$$

$$4(1-t^{10})+5t(t^8-1)=0$$

$-1<t<0$ の時. 左辺は正, $t<-1$ の時. 左辺は負でいずれも不適で, $t=-1$ のみ適する。この時 $\beta=-\alpha$ で, ③④に代入して,

$$\begin{cases} 9-7\alpha^2=0 \\ p(1-\alpha^2)=1 \end{cases} \quad \therefore (\alpha,\beta,p)=\left(\frac{3}{7}\sqrt{7},-\frac{3}{7}\sqrt{7},-\frac{7}{2}\right) \quad (\alpha<0<\beta をみたす$$

逆にこの時 $f'(x)=px^6\{9x^2-9\}$ となり. 下表をうる。

x		−1		1	
f'	−	0	+	0	−
f	↘		↗		↘

よって $x=1$ で極大となり. 十分。以上から $f(x)=-\frac{7}{2}x^7\left(x^2-\frac{3}{7}\right)$ //

ok

第4問

[解] ・$x \ge 0$ で $f'(x) > 0$ …*

・$f(0)=a\ (a>1)$

Pでの接線 l: $y=f'(t)(x-t)+f(t)$, 法線 n: $y=-\frac{1}{f'(t)}(x-t)+f(t)$

だから $Q\left(-\frac{f(t)}{f'(t)}+t,\ 0\right)$ $R\left(f(t)f'(t)+t,\ 0\right)$ となり

*から $f(x)$ は単調増加なことから

$$F(t)=f(t)f'(t)+t+\frac{f(t)}{f'(t)}-t=f(t)f'(t)+\frac{f(t)}{f'(t)}$$

したがって (ハ)から

$$f'(t)+\frac{1}{f'(t)}=\frac{f(t)}{f'(t)} \quad \cdots ①$$

(1) ①から

$$\{f'(t)\}^2=f(t)-1 \quad \cdots ☆$$

両辺 t で微分して

$$2f'(t)f''(t)=f'(t)$$

$$f''(t)=\frac{1}{2} \quad (\because f'(t)>0) \quad \cdots ②$$

したがって、$f'(t)$ は単調増加関数で、②の両辺積分して

$$f'(t)=\frac{1}{2}t+C \quad \cdots ③$$

とおける。*から $f'(0)=C>0$ …④ である。③の両辺積分して

$$f(t)=\frac{1}{4}t^2+Ct+a \quad \cdots ⑤$$

とおける(*)。③,⑤を☆に代入

$$\left(\frac{1}{2}t+c\right)^2=\frac{1}{4}t^2+ct+a-1$$

$$c^2=a-1$$

これと④から $C=\sqrt{a-1}$ である。$f(x)$ の $[x, x+h]$ に平均値の定理を適用して(微分可能かつ連続)

$$f(x+h)-f(x)=f'(p)\cdot h$$

なる $p\ (x<p<x+h)$ がある。③とあわせて

$$f(x+h)-f(x)\ge\sqrt{a-1}\cdot h \quad □$$

(2) (1)から、$f(t)=\frac{1}{4}t^2+\sqrt{a-1}\,t+a$ である

$$F(t)=\frac{\{f(t)\}^2}{f'(t)}$$

から

$$F'(t)=\frac{2f(t)\cdot f'(t)^2-f''(t)\{f(t)\}^2}{\{f'(t)\}^2}$$

$$=\frac{f(t)}{\{f'(t)\}^2}\underline{\left\{2\{f'(t)\}^2-f(t)f''(t)\right\}}$$

の符号は $t\ge0$ のとき ～部のそれに等しい

$$～=2\left\{\frac{1}{2}t+\sqrt{a-1}\right\}^2-\left(\frac{1}{4}t^2+\sqrt{a-1}\,t+a\right)\frac{1}{2}$$

$$=2\left[\frac{1}{4}t^2+\sqrt{a-1}\cdot t+a-1\right]-\frac{1}{8}t^2-\frac{1}{2}\sqrt{a-1}\cdot t-\frac{1}{2}a$$

$$=\frac{3}{8}t^2+\frac{3}{2}\sqrt{a-1}\cdot t+\frac{3}{2}a-2\equiv g(t)$$

$g(t)=0$ の2解 α, β として、下表を得る。($\alpha<\beta$)

1° $\alpha<\beta\le0$ つまり $\frac{4}{3}\le a$ の時

$t\ge0$ で $F(t)$ は単調増加で、$\min F(t)=F(0)=\frac{a^2}{a-1}\sqrt{a-1}$

2° $\alpha<0\le\beta$ つまり $1<a\le\frac{4}{3}$ の時

t	0		β	
F'		$-$	0	$+$
F		↘		↗

$\min F(t)=F(\beta)=\frac{16}{9}\sqrt{3}$

以上まとめて、

$$\min F(t)=\begin{cases}\frac{16}{9}\sqrt{3} & \left(1<a\le\frac{4}{3}\right)\\ \frac{a^2}{a-1}\sqrt{a-1} & \left(\frac{4}{3}\le a\right)\end{cases} \quad //$$

[別] $F^2(t)=\frac{f^4(t)}{f(t)-1}$ に気付くと早いか、$T=f(t)$ とチカンしてゆけば良い。