東工大 数学 1995

事故 120/150

91 ~ 94

第 1 問

[解] (1) $n\to\infty$ の時を考えるので、$n\geq 4$ として良い。

$$0\leq a(n)\leq \frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}=\frac{(1+2/n)(1+3/n)(1+4/n)}{n(1-1/n)(1-2/n)(1-3/n)}$$

右辺は 0 に収束するから $(n\to\infty)$ はさみうちの定理から. $a(n)\to 0$ //

(2) $a(1)$ から書き出す

$a(1)=a(2)=60$

$a(3)=35$, $a(4)=14$ $a(5)=\frac{21}{5}$ $a(6)=1$

$a(7)<1$

以下. $a(n)$ が $n\geq 2$ で単調減少であることを示す.

$$a(n)-a(n+1)=\frac{(n+3)(n+4)}{(n+1)!}\left[(n+1)(n+2)-(n+5)\right]$$

$$=\frac{(n+3)(n+4)}{(n+1)!}(n^2+2n-3)>0\ (\because n\geq 2)$$

より. 示された。これと $a(7)<1$, $a(n)\to 0\ (n\to\infty)$ から.

$7\leq$ なる $n\in\mathbb{N}$ に対し、$0<a(n)<1$ となり. $a(n)\notin\mathbb{Z}$。

以上から.

$n=1,2,3,4,6$ //

(3) (2)から. $S_n=\prod_{k=1}^{n}a(k)$ とおくと. $n\geq 7$ の時. S_n は単調減少である. (2)から. $n=1,2,\cdots,7$ の時. $S_n\in\mathbb{Z}$ である.

$n\geq 8$ の時

$$S(8)=\frac{3^2\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11^2}{4}\notin\mathbb{Z}$$

$$S(9)=\frac{5\cdot 11^3\cdot 13}{2^7\cdot 3}\notin\mathbb{Z}$$

$$S(10)=\frac{11^3\cdot 13^2}{2^{12}\cdot 3^4\cdot 5}\notin\mathbb{Z}<1$$

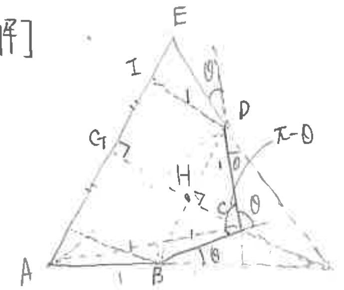
より. $10\leq n$ の時 $0<S(n)<1$ で $S(n)\notin\mathbb{Z}$

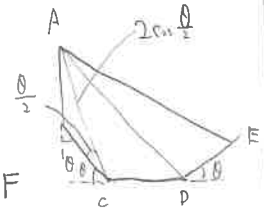
以上から $n=1,2,3,4,5,6,7$ //

p.[illegible]

第 2 問

[解]





上のように各点を置く。$\angle DCH = \frac{\pi-\theta}{2}$ (∵△BCDが2等辺三角形)だから

$$\angle DFC = \frac{\pi-\theta}{2} - \theta = \frac{\pi-3\theta}{2}$$

$\triangle EDI \propto \triangle EFG$から$\angle EDI = \frac{\pi-3\theta}{2}$なので

$$DI = \cos\frac{\pi-3\theta}{2},\quad EI = \sin\frac{\pi-3\theta}{2}$$

$$CH = \cos\frac{\pi-\theta}{2},\quad DH = \sin\frac{\pi-\theta}{2}$$

だから

$$\square EDCG = \triangle DHC + \angle DEI + \square IDHG$$

$$= \frac{1}{2}\sin\frac{\pi-3\theta}{2}\cos\frac{\pi-3\theta}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi-\theta}{2}\cos\frac{\pi-\theta}{2}$$

$$+ \cos\frac{\pi-3\theta}{2}\sin\frac{\pi-\theta}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\sin(\pi-3\theta) + \frac{1}{4}\sin(\pi-\theta) + \frac{1}{2}\left[\sin\frac{2\pi-4\theta}{2} + \sin\frac{2\theta}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\sin 3\theta + \frac{1}{4}\sin\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta + \frac{1}{2}\sin\theta \equiv T$$

より、対称性から五角形の面積Sとして、$S = 2T$だから

$$S = \frac{1}{2}\sin 3\theta + \sin 2\theta + \frac{3}{2}\sin\theta$$

$$\frac{dS}{d\theta} = \frac{3}{2}\cos 3\theta + 2\cos 2\theta + \frac{3}{2}\cos\theta$$

$$= 3\cos 2\theta \cdot \cos\theta + 2\cos 2\theta$$

$$= \cos 2\theta\,(3\cos\theta + 2)$$

$0 < \theta < \pi/2$から、下表を得る

θ	0		$\pi/4$		$\pi/2$
S'		+	0	−	0
S		↗		↘	

従って、Sは$\theta = \pi/4$の時、最大値 $1+\sqrt{2}$ をとる。

第 3 問

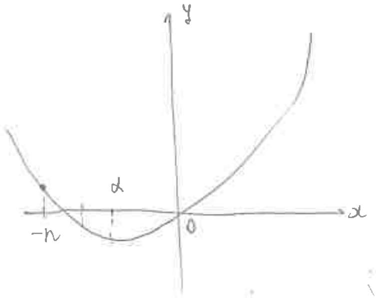
[解] (1) $f(x)=\frac{1}{n^2}x^2+e^{2x}-1$, $f'(x)=\frac{2}{n^2}x+2e^{2x}$, $f'(x)$は

単調増加かつ $f'(x)\to\pm\infty\ (x\to\pm\infty)$ から, $f'(\alpha)=0$

なるαが唯1つ存在。($\alpha<0$)

x		α	
f'	$-$	0	$+$
f	↘		↗

//



($f(x)\to\infty\ (x\to\pm\infty)$)

(2) x_nは $\frac{1}{n^2}x_n^2+e^{2x_n}-1=0$ をみたし, $x_n\neq0$ で

あるから, $f(x)=0$の $x\neq0$の解である.

$$f(-n)=e^{-2n}>0 \qquad \cdots ①$$

kを定数とする ($k>0$)

$$f(-n+k)=\frac{-2kn+k^2}{n^2}+e^{2(k-n)}$$

$$=-2k\frac{1}{n}+\frac{k^2}{n^2}+e^{2(k-n)}$$

nが十分大きい時, $\frac{1}{n}\gg\frac{1}{n^2}\gg\frac{1}{e^n}$ だから

$$f(-n+k)<0 \qquad \cdots ②$$

①, ②と $y=f(x)$のグラフから

$$-n<x_n<-n+k$$

$n>0$から $-1<\frac{x_n}{n}<-1+\frac{k}{n}$

はさみうちの定理から

$$\frac{x_n}{n}\to-1\ (n\to\infty)$$

//

第 4 問

[解] $n \geqq 3 \cdots ①$

(1) 全ての場合 ${}_nP_2$ 通りについての引いた2枚の積の和は.(1枚目, 2枚目を区別)

$$1\cdot(2+\cdots+n)+2(1+3+\cdots+n)+\cdots+n(1+2+\cdots+n-1)$$

$$=(1+2+\cdots+n)^2-(1^2+2^2+\cdots+n^2)$$

$$=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

だから.

$$E=\frac{1}{{}_nP_2}\left[\frac{1}{4}n^2(n+1)^2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{4}n(n+1)^2-\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)\right]$$

$$=\frac{(n+1)(3n^2-n-2)}{12(n-1)}=\frac{(n+1)(3n+2)}{12}$$ //

(2) 全ての場合 ${}_nP_3$ 通りについての引いた3枚の積は

$$(1+2+\cdots+n)^3-{}_3C_2(1^2+2^2+\cdots+n^2)(1+2+\cdots+n)+2(1^3+2^3+\cdots+n^3)$$

$$=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^3-3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2\cdot\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

$$=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)^2\right\}\left[\frac{1}{2}n(n+1)-(2n+1)+2\right]$$

だから.

$$\frac{E(n)}{n^3}=\frac{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2\left(\frac{1}{2}n^2-\frac{3}{2}n+1\right)}{n^4(n-1)(n-2)}$$

$$=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\frac{(n-1)(n-2)}{2(n-1)(n-2)}\longrightarrow\frac{1}{8}\quad(n\to\infty)$$ //