T.K.大数学 1994

58分

第 1 問

[解] $C: y=x^2$, $P(\alpha, \alpha^2)$ $Q(\beta, \beta^2)$ ($\alpha<\beta \cdots ①$) とおく。題意の面積に関する規定から

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \qquad \therefore\ \beta-\alpha=1 \qquad \cdots ②$$

である。又 P, Q における C の接線は

$$l_P: y=2\alpha x-\alpha^2$$
$$l_Q: y=2\beta x-\beta^2$$

だから R$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha\beta\right)$ である。$X=\frac{\alpha+\beta}{2}$, $Y=\alpha\beta$ とおく。② から β をけして ①, X, Y に代入

$$\begin{cases} \alpha<\alpha+1 \\ X=\dfrac{2\alpha+1}{2} \\ Y=\alpha(\alpha+1) \end{cases}$$

$\alpha=X-\frac{1}{2}$ だから $Y=\left(X-\frac{1}{2}\right)\left(X+\frac{1}{2}\right)=X^2-\frac{1}{4}$ となり、求めるのは $y=x^2-\frac{1}{4}$ //

第 2 問

[解] $C : xy = -2$, $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$ とする

(1) $Q(X, Y)$ とおくと,

$$X + Yi = \left(t - \frac{2}{t}i\right)(c + is) = \left(tc + \frac{2}{t}s\right) + i\left(ts - \frac{2}{t}c\right)$$

だから. $t, s, c \in \mathbb{R}$ から、実・虚部を比較して.

$$Q\left(tc + \frac{2}{t}s,\ ts - \frac{2}{t}c\right)_{\#}$$

(2) $Q(X, Y)$ を時計回りに θ だけまわすと P になるので $P(x, y)$ として

$$x + yi = (X + Yi)(c - is) = (Xc + Ys) + i(-Xs + Yc)$$

だから. (1)と同様に

$$x = Xc + Ys,\quad y = -Xs + Yc$$

だから C に代入して

$$(Xc + Ys)(-Xs + Yc) = -2$$

よって Q は

$$(x\cos\theta + y\sin\theta)(-x\sin\theta + y\cos\theta) = -2_{\#}$$

を通る。

(3) $(x, y) = (\sqrt{3} + 1, \sqrt{3} - 1)$ を代入して

$$\{(\sqrt{3}+1)c + (\sqrt{3}-1)s\}\{-(\sqrt{3}+1)s + (\sqrt{3}-1)c\} = -2$$

$$-(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)s^2 + (\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)c^2 + \{(\sqrt{3}-1)^2 - (\sqrt{3}+1)^2\}sc = -2$$

$$2(c^2 - s^2) - 4\sqrt{3}cs = -2$$

$$-\cos 2\theta + \sqrt{3}\sin 2\theta = +1$$

$$2\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \quad \cdots ①$$

$0 < \theta < 2\pi$ から $-\frac{\pi}{6} < 2\theta - \pi/6 < \frac{23}{6}\pi$ だから. ①をみたすのは. .

$$2\theta - \pi/6 = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi, \frac{17}{6}\pi$$

$$\theta = \frac{1}{6}\pi, \frac{3}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{9}{6}\pi$$

$$= \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi_{\#}$$

1/

第 3 問

[解]

(1) $\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx = \frac{1}{1+1}\left[-e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x\right]_0^{\pi}$

$= \frac{1}{2}\left[+e^{-\pi}+1\right]$ //

(2) $A_n = \int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx$ とおく。$a_k = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx$ とおくと, $t = x-(k-1)\pi$ と

して.

$a_k = \int_0^{\pi} e^{-t-(k-1)\pi}|\sin t|\,dx$

$= e^{-(k-1)\pi}\int_0^{\pi} e^{-t}\sin t\,dt$ $(\because 0\leq t\leq \pi$ で $\sin t \geq 0)$

$= e^{-(k-1)\pi}\cdot a_1$

だから

$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1\frac{1-e^{-n\pi}}{1-e^{-\pi}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{a_1}{1-e^{-\pi}} = \frac{1}{2}\frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}$ // $(\because (1))$

第4問

[解] $f(m,n)=\frac{1}{2}(m+n)(m+n+1)+n$ である。$((m,n)\neq(0,0))$

(1) $(m,n)=(0,0)$ は題意をみたす。以下他の場合をかんがえる。

$$\frac{1}{2}(m+n)(m+n+1)+n\leq 5$$

$$(m+n)(m+n+1)+2n\leq 10 \quad \cdots ①$$

$t=m+n$ とすると、$n\geq 0$ から $t(t+1)\leq 10$ となり、$1\leq t$, $t\in\mathbb{N}$ とあわせて、

$t=1,2$ となる。

<u>1° $t=1$</u>

$(m,n)=(0,1),(1,0)$ で、共に①をみたし、十分。

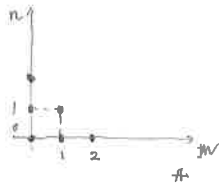
<u>2° $t=2$</u>

$(m,n)=(0,2)\ (1,1)\ (2,0)$ で、共に①をみたし、十分。

以上から、もとめる (m,n) は

$(m,n)=(0,0)\ (0,1)\ (0,2)\ (1,0)\ (1,1)\ (2,0)$

で、図示して右図黒丸



(2) $f(m,n)=f(m',n')$ とする。$(m,n)=(0,0)$ の時は明らかで、他の場合をかんがえる。

$$\frac{1}{2}(m+n)(m+n+1)+n=\frac{1}{2}(m'+n')(m'+n'+1)+n'$$

$$t(t+1)+2n=t'(t'+1)+2n' \quad (t'=m'+n') \quad \cdots ②$$

ここで、$f(x,y)=x^2+x+2y$ $(0\leq y\leq x)$ とおくと、これは y の単調増加関数で、

$$x^2+x\leq f(x,y)\leq x^2+3x \quad \cdots ③$$

となる。この両辺は $x>0$ では単調増加で、$x=t$ として、

$$t^2+t\leq f(t,n)\leq t^2+3t$$

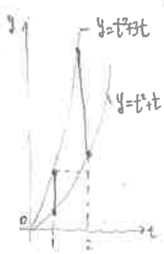
であり、$\{(t+1)^2+(t+1)\}-(t^2+3t)=2>0$ から、異なる2自然数 t,t' に対し、

$f(t,n)=f(t',n')$ となることはない。すなわち、②が成立するには

$t=t'$ が必要で、この時、$n=n'$ とすれば十分。この時 $m=m'$ も

成立する。以上から、$f(m,n)=f(m',n')$ の時、$(m,n)=(m',n')$

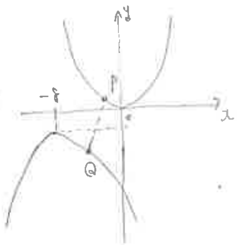
となる ■



[解] $f(x)=x^2,\ g(x)=-x^2-16x-65=-(x+8)^2-1$ とおく。

P, Q の x 座標 $\alpha,\ \beta-8$ とする

$$\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}\beta-8\\ -\beta^2-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta-\alpha-8\\ -\alpha^2-\beta^2-1\end{pmatrix}$$



だから. $a=\beta-\alpha,\ b=\beta+\alpha$ とすると

$$\alpha^2+\beta^2=(b^2+a^2)/2$$

に注意して

$$|\overrightarrow{PQ}|^2=(a-8)^2+\left(\frac{a^2+b^2}{2}+1\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}\left(b^2+(a^2+2)\right)^2+(a-8)^2 \quad \cdots ①$$

$\alpha,\ \beta$ は x の2次式 $x^2-bx+\frac{b^2-a^2}{4}=0$ の2実解だから. 判別式 D として

$$D=b^2-(b^2-a^2)\geq 0 \quad \therefore a^2\geq 0$$

これは $a\in\mathbb{R}$ から常に成立。よって① の min をかんがえれば良い。a を固定すると $b=0$ で

min で:

$$\min|\overrightarrow{PQ}|^2=\frac{1}{4}(a^2+2)^2+(a-8)^2\ (\equiv f(a))$$

とすると

$$f'(a)=\frac{1}{2}(a^2+2)\cdot 2a+2(a-8)=a^3+4a-16=(a-2)(a^2+2a+8)$$

から下表をうる

a		2	
f'	−	0	+
f	↘		↗

よって $a=2$ で $|\overrightarrow{PQ}|^2$ は min をとる。$|\overrightarrow{PQ}|\geq 0$ から この時 $|\overrightarrow{PQ}|$ も最小で.

$$\min|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$$ //