T. K. 大数学 1993

第 1 問

[解] C_1とL, C_2とLの原点以外の交点、$A(\alpha, k\alpha)$ $B(\beta, k\beta)$とおく。α, βは各々、
xの2次方程式 $ax^2+bx=kx$, $px^2+qx=kx$の解のうち$x \neq 0$のもので

$$\alpha = \frac{k-b}{a}, \quad \beta = \frac{k-q}{p} \quad \cdots ①$$

である。

$$\begin{cases} S_1 = \left| \int_\alpha^0 (ax^2+bx-kx)\,dx \right| = \dfrac{|a|}{6}|\alpha|^3 \\ S_2 = \dfrac{|p|}{6}|\beta|^3 \end{cases}$$

だから、①から

$$\begin{aligned} S_1 : S_2 &= |a||\alpha|^3 : |p||\beta|^3 \\ &= |a|\frac{|k-b|^3}{|a|^3} : |p|\frac{|k-q|^3}{|p|^3} \\ &= \frac{|k-b|^3}{a^2} : \frac{|k-q|^3}{p^2} \quad \cdots ② \end{aligned}$$

であり、②がkによらない、すなわち $\dfrac{|k-b|^3}{a^2} = A\dfrac{|k-q|^3}{p^2}$ がkの恒等式になるような
Aの存在条件をかんがえれば良い。両辺0以上だから2乗して良く、

$$p^4(k-b)^6 = A^2 a^4 (k-q)^6 \quad \cdots ③$$

係数比較して、

$$\begin{cases} 6次 \cdots p^4 = A^2 a^4 & \cdots ④ \\ 1次 \cdots -6bp^4 = A^2 a^4(-6q) & \cdots ⑤ \end{cases}$$

$A \neq 0$, $p \neq 0$, $a \neq 0$ だから、④、⑤から、$b = q$ …⑥ 及び $p = \pm\sqrt{A}a$ …⑦ が必要。
逆にこの時②において

$$\frac{|k-b|^3}{a^2} : \frac{|k-q|^3}{p^2} = \frac{|k-b|^3}{a^2} : \frac{|k-b|^3}{A \cdot a^2} = 1 : \frac{1}{A} \quad (\because k \neq b)$$

で、たしかに$S_1 : S_2$は一定で十分。⑦をみたすAは必ず存在するから、求める条件は⑥で

$$b = q$$

第 2 問

[解] (1) $\dfrac{\sin(2n+1)x}{\sin x} = \dfrac{x}{\sin x}\,\dfrac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)x}\,(2n+1) \xrightarrow{x\to 0} 2n+1$ //

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ …① を帰納法で示す. $n=1$ の時

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 3x}{\sin x}\,dx = \int_0^{\pi/2}(3-4\sin^2 x)\,dx = [3x]_0^{\pi/2} - 4\cdot\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{3}{2}\pi - 2\left(\pi/2\right) = \frac{1}{2}\pi$$

で成立。以下 $n=k\in\mathbb{N}$ での成立を仮定し, $n=k+1$ での成立を示す.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2k+3)x}{\sin x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2k+1)x\cos 2x + \sin 2x\cdot\cos(2k+1)x}{\sin x}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2k+1)x}{\sin x}(1-2\sin^2 x)\,dx + \int_0^{\pi/2} 2\cos x\cdot\cos(2k+1)x\,dx \quad \cdots②$$

であり,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2k+1)x}{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2} \quad (\because カテイ)$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\sin(2k+1)x\,dx = 0 \quad (\because k\geq 1)$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos x\cos(2k+1)x\,dx = 0 \quad (\because k\geq 1)$$

だから, ②に代入して

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2k+3)x}{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2} - 0 + 0 = \frac{\pi}{2}$$

より $n=k+1$ でも①は成立。よって示された $\blacksquare$

第 3 問

[解] (1) $f(x)=x^4-2ax^2$ とおく。$x=t$ での接線は $l_t: y=(4t^3-4at)x-3t^4+2at^2$ であるから，C と l_t の交点の x 座標は，（P のぞく）

$$x^4-2ax^2=(4t^3-4at)x-3t^4+2at^2$$

$$x^4-2ax^2-4t(t^2-a)x+3t^4-2at^2=0$$

$$(x-t)^2(x^2+2tx+(3t^2-2a))=0 \quad \cdots$$

のうち $x \neq t$ のもの，すなわち

$$x^2+2tx+3t^2-2a=0 \quad (\text{左辺 } g(x) \text{ とする}) \quad \cdots①$$

の解である。この判別式 D として，$-\sqrt{a}\leq t\leq\sqrt{a}$ から

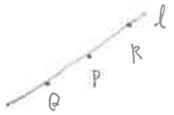
$$D/4=t^2-(3t^2-2a)=2a-t^2\geq 0$$

となり，①は異2実解（重解含む）を持つ。したがって，①の2解が α β で

$$\alpha+\beta=-2t,\ \alpha\beta=3t^2-2a$$

(2) $\alpha\leq\beta$ だから，題意の条件は（重なる場合をのぞいて）

$$\alpha<t<\beta \quad \cdots②$$



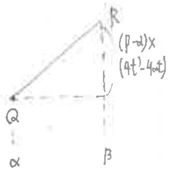
である。すなわち，①の解が $x<t$ に1つ，$t<x$ に1つある時で，この条件は

$$f(t)<0 \iff 6t^2-2a<0 \iff -\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{a}<t<\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{a}$$

である。

(3) l の傾きは $4t^3-4at$ だから，位置カンケイは右図のようになる。

したがって ピタゴラスの定理から



$$L^2=(\beta-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2\cdot(4t^3-4at)^2$$

$$=\{1+16t^2(t^2-a)^2\}\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}$$

$$=\{1+16t^2(t^2-a)^2\}\{(-2t)^2-4(3t^2-2a)\} \quad (\because(1))$$

$$=\{1+16t^2(t^2-a)^2\}(8a-8t^2)$$

(4) $L^2\equiv h(p)$ $(p=t^2)$ とすると，$-\sqrt{a}\leq t\leq\sqrt{a}$ から $0\leq p\leq a$ $\cdots$③である。(3)より

$$h(p)=\{1+16p(p-a)^2\}(8a-8p)$$

$$=-8(p-a)\{1+16p(p-a)^2\}$$

だから，

$$-\frac{1}{8}h'(p)=1+16p(p-a)^2+(p-a)\cdot16\cdot(3p^2-4ap+a^2)$$

$$=16(p-a)\{p(p-a)+3p^2-4ap+a^2\}+1$$

$$=16(p-a)^3(4p-a)+1$$

$$=64p^3-9\cdot16ap^2+6\cdot16a^2p-16a^3+1$$

$$=2^6p^3-2^2\cdot3\cdot7p^2+\frac{2\cdot7^2}{3}p+1-\frac{7^3}{2^2\cdot3^3} \quad (\because a=\frac{7}{12})$$

$$=2^8\cdot3^3p^3-2^4\cdot3^4\cdot7p^2+2^3\cdot3^2\cdot7^2p-3^3\cdot5$$

$$=4q^3-63q^2+2\cdot3\cdot7^2q-3^3\cdot5 \quad (q=2^2\cdot3\cdot p)$$

$$=(q-1)(4q^2-59q+135)$$

より右上表を33。

q	0		1		7
h'		+	0	−	
h		↗		↘	

（③と $q=12p$ から，$0\leq q\leq 7$）

したがって，$h(p)$ は $q=1$ ∴ $p=\frac{1}{12}$ で max で

$$\max L^2=-8\left(\frac{1}{12}-\frac{7}{12}\right)\left\{1+16\frac{1}{12}\left(\frac{1}{12}-\frac{7}{12}\right)^2\right\}$$

$$=4\left(1+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4}\right)=\frac{16}{3}$$

$L>0$ から

$$\max L=\sqrt{\frac{16}{3}}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$$

第 4 問

[解] n次多項式$P_n(x)$とおく。題意（◇とおく）を帰納的に示す。$n=1$の時．$P_1(x)=ax+b$ $(a\neq 0)$とおけて．$P_1(0)$．$P_1(1)\in\mathbb{Z}$から

$$a+b\in\mathbb{Z},\ b\in\mathbb{Z}\qquad\therefore\ a,b\in\mathbb{Z}$$

となり．たしかに任意のセイスウkに対し$P_1(k)\in\mathbb{Z}$となるから◇は成立。以下$n\leqq l\in\mathbb{N}$での◇の成立を仮定し，$n=l+1$での成立を示す。そこで$P_{l+1}(x)$について．$P_{l+1}(0)$，…$P_{l+1}(l+1)$が全て整数だとする。$Q(x)=P_{l+1}(x+1)-P_{l+1}(x)$とおくと，$Q(x)$は$l$次以下の多項式で．仮定から．$Q(0)$．$Q(1)$…$Q(l)$が全てセイスウなので．帰納法のカテイから．任意の$k\in\mathbb{Z}$に対して

$Q(k)\in\mathbb{Z}$，すなわち

$$P_{l+1}(k+1)=P_{l+1}(k)+Q(k)$$

から．任意のkに対して$P_{l+1}(k)\in\mathbb{Z}$となり（ニカテイ），$n=l+1$でも◇は成立。以上から示された図

第 5 問

[解] $x_k=1,2,\cdots,6$ だから、$(k=1,2,3,4)$ P, O, Qの3点は常に異なるので、

$\angle POQ$ が鋭角 $\iff \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}>0 \iff x_1x_3>x_2x_4$ …①

である。ここで、さいころの出る目 6^4 通りのうち、

$$\begin{cases} x_1x_3>x_2x_4 & \cdots \text{A通り} \\ x_1x_3=x_2x_4 & \cdots \text{B〃} \\ x_1x_3<x_2x_4 & \cdots \text{C〃} \end{cases}$$

とおくと、対称性から $A=C$ …② であり、上で全ての場合が尽くされ、かつ排反だから

$A+B+C=6^4$ …③ も成立する。ここで、Bを数える。

p,q $(p,q=1,2,\cdots,6)$ に対する積 pq は以下のようになる。

q \ p	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	$\boxed{6}$
2	2	4	$\boxed{6}$	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

したがって、$x_1x_3=x_2x_4$ をみたすのは、(x_1,x_3) と (x_2,x_4) の組が等しいか、それ以外で積が4, 6, 12の時で、

$$B=(\underset{\text{積4}}{4}+\underset{\text{積6,12}}{8+8})+\underset{\text{⤴kがひとしい}}{6}+\underset{\text{それ以外}}{4\cdot{}_6C_2} = 86$$

だから、②③から

$$A=\frac{6^4-86}{2}$$

となり、①から、もとめる確率は

$$\frac{\frac{6^4-86}{2}}{6^4}=\frac{3\cdot6^3-43}{6^4}=\frac{605}{1296}$$