T. K. 大 数学 1992

575

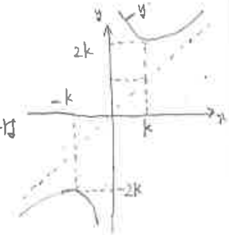
第 1 問

[解] $f_k(x) = \dfrac{x^2-2x+k^2}{x^2+2x+k^2} = 1 - \dfrac{4x}{x^2+2x+k^2}$ とおく。

$k=0$の時. $f_0(x) = 1 - \dfrac{4}{x+2}$ だから. $x \to -2+0$ の時. 1以外の整数値をとり不適

だから. $k \neq 0$ である。この時. $f(0)=1$ となる. $x \neq 0$の時

$$f(x) = 1 - \frac{4}{(x+k^2/x)+2}$$



であり、$y := x+k^2/x$ とおくと, 右のグラフから, 題意の条件は

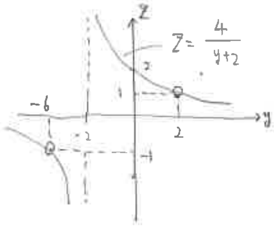
は

$$2<y \text{ or } y<-6$$

$$\iff 2<2k \text{ or } -2k<-6$$

$$\iff 3<k$$

である。



第　　問

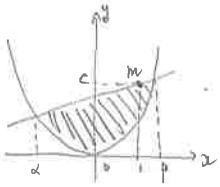
第 3 問

[解] $c>1$ …① $A(1,c)$ とおく。l の傾き m とおく。$l: y=m(x-1)+c$ だから

$$x^2=m(x-1)+c \quad \cdots ②$$

の2解 α, β $(\alpha<\beta)$ が l と $y=x^2$ の交点の x 座標である。

題意の面積 S として



$$S=\int_\alpha^\beta \{m(x-1)+c-x^2\}\,dx$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \quad \cdots ③$$

であり、$\alpha<\beta$ と α, β が②の解であることから

$$\beta-\alpha=2\,\frac{\sqrt{m^2-4(m-c)}}{2}=\sqrt{m^2-4m+4c}$$

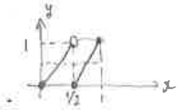
だから、③に代入して

$$S=\frac{1}{6}\{(m-2)^2+4c-4\}^{3/2}$$

これは $m=2$ の時、$\min S=\frac{1}{6}8(c-1)^{3/2}=\frac{4}{3}(c-1)^{3/2}$ をとる。

第 4 問

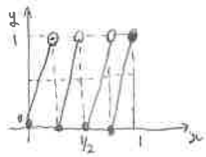
[解] $f(x) = \begin{cases} 2x & (0 \le x < 1/2) \\ 2x-1 & (1/2 \le x \le 1) \end{cases}$



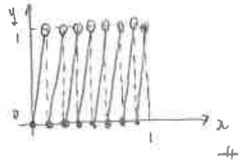
(1) 漸化式から、

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} 2f_n(x) & (0 \le f_n(x) < 1/2) \\ 2f_n(x)-1 & (1/2 \le f_n(x) \le 1) \end{cases} \quad \cdots ①$$

となる。$y=f_2(x)$, $y=f_3(x)$ のグラフを順に書いて、



$(y=f_2(x))$



$(y=f_3(x))$

又、式にして、$k=0,1,\cdots,7$ に対し

$$f_3(x) = 8x-k \ \left(\frac{k}{8} \le x < \frac{k+1}{8}\right),\ f_3(1)=1 \quad /\!/$$

(2) (1)以下同様に、$f_n(x) = 2^n x - t \ \left(\frac{t}{2^n} \le x < \frac{t+1}{2^n}\right)$, $f_n(1)=1$ $(t=0,1,\cdots,2^n-1)$ であること…◇

を帰納的に示す。$n=l$ $(l \in \mathbb{N})$ での◇の成立を仮定すると、①から、

$$f_{l+1}(x) = \begin{cases} 2(2^l x-t) & \left(\frac{t}{2^l} \le x < \frac{t+1/2}{2^l}\right) \\ 2(2^l x-t)-1 & \left(\frac{t+1/2}{2^l} \le x < \frac{t+1}{2^l}\right) \end{cases}$$

つまり

$$f_{l+1}(x) = \begin{cases} 2^{l+1}x-2t & \left(\frac{2t}{2^{l+1}} \le x < \frac{2t+1}{2^{l+1}}\right) \\ 2^{l+1}x-(2t+1) & \left(\frac{2t+1}{2^{l+1}} \le x < \frac{2t+2}{2^{l+1}}\right) \end{cases}$$

だから、$f_{l+1}(1)=1$ とあわせて、$f_{l+1}(x)=2^{l+1}x-t \left(\frac{t}{2^{l+1}} \le x < \frac{t+1}{2^{l+1}}\right)$ となり、$n=l+1$ でも◇

は成立。よって任意の $n \in \mathbb{N}$ で◇は成立。図

従って、$1 \le l \le n$ なる自然数 l に対し

$$f_l(p) = 2^l p - t_p \quad \left(\text{ただし、} t_p \text{は} \frac{t_p}{2^l} \le p < \frac{t_p+1}{2^l} \text{をみたす0以上の整数}\right) \cdots ②$$

と書ける。ところで、$n \to \infty$ をかんがえるので n は十分大きいとして良く、$m < n$ で考えれば良い。…③

$$\frac{t_p}{2^l} \le \frac{k}{2^m} < \frac{t_p+1}{2^l} \Leftrightarrow k \cdot 2^{l-m} - 1 < t_p \le k \cdot 2^{l-m} \quad \cdots ③$$

である。$l \ge m$ の時、③の両辺は整数（1つ差）で、$t_p \in \mathbb{Z}$ だから右側の等号が成立し、

この時 $f_l(p)=0$ である。したがって、$l=1,2,\cdots,m$ で和をとれば良い。(∵③)

$$\sum_{l=1}^{n} f_l(p) = \sum_{l=1}^{m} f_l(p) = A \ (n\text{に関係ない定数})$$

だから、

$$(\text{与式}) = \frac{A}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad /\!/$$

となる。

第 5 問

[解] $I_n = (-1)^n \int_0^{\pi/4} \frac{x \cos(2n-1)x}{\cos x} dx$ である。

(1) $I_n - I_{n-1} = (-1)^n \left[+ \int_0^{\pi/4} \frac{x \cos(2n-1)x}{\cos x} dx + \int_0^{\pi/4} \frac{x \cos(2n-3)x}{\cos x} dx \right]$

$= (-1)^n \int_0^{\pi/4} \frac{x\{\cos(2n-3)x + \cos(2n-1)x\}}{\cos x} dx$

$= (-1)^n \int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos x} \cdot 2\cos(2n-2)x \cos x \, dx$

$= (-1)^n \int_0^{\pi/4} 2x \cos(2n-2)x \, dx$ ……①

これはn≧2であることから

$\int_0^{\pi/4} x \cos(2n-2)x \, dx = \left[\frac{x}{2n-2} \sin(2n-2)x + \frac{1}{(2n-2)^2} \cos(2n-2)x \right]_0^{\pi/4}$

$= \frac{\pi}{4} \frac{1}{2n-2} \sin \frac{n-1}{2}\pi + \frac{1}{(2n-2)^2} \left(\cos \frac{n-1}{2}\pi - 1 \right)$

だから、①に代入して

$I_n - I_{n-1} = 2(-1)^n \left\{ \frac{\pi}{4} \frac{1}{2n-2} \sin \frac{n-1}{2}\pi + \frac{1}{(2n-2)^2} \left(\cos \frac{n-1}{2}\pi - 1 \right) \right\}$ #

(2) $I_1 = -\int_0^{\pi/4} x \, dx = -\frac{1}{2}(\pi/4)^2$ だから、(1)で$n=2, 3$として

$$\begin{cases} I_2 = I_1 + 2\left(\frac{\pi}{4} \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = I_1 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \\ I_3 = I_2 - 2\left(\frac{\pi}{4} \frac{1}{4} \cdot 0 - \frac{1}{8} \right) = I_2 + \frac{1}{4} \end{cases}$$

$\therefore I_3 = I_1 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{\pi^2}{32} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}$ #

である。