T. K. 大数学 1991

[解] $n \in \mathbb{N}$ …①。$f(n)$は、$n!$の中の素因数 $2^p, 5^q$ $(p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$について、$p, q$のうち大きくない方に等しい。明らかに $p \geq q$ だから、$f(n) = q$ である。

(1) $10 \div 5 = 2$ から $q = 2$ $\therefore f(10) = 2$ //

$100 \div 5 = 20$, $100 \div 25 = 4$ から $f(100) = 20 + 4 = 24$ //

(2) (1)と同様にして、

$$f(10^n) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{10^n}{5^k} \right] \quad \cdots ①$$

とかける。ただし、$[x]$は、$[x]$以下の最大のセイ数である。$k = 2n$の時、

$$\left[\frac{10^n}{5^{2n}} \right] = \left[\left(\frac{2}{5} \right)^n \right] = 0$$

だから、$\left[\frac{10^n}{5^k} \right]$が$k$の単調減少カンスウであることとあわせて、①で $k = 1, 2, \cdots, 2n$ として和をとれば良く、

$$f(10^n) = \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{10^n}{5^k} \right) \quad \cdots ②$$

$[x]$の性質から

$$\frac{10^n}{5^k} - 1 < \left[\frac{10^n}{5^k} \right] \leq \frac{10^n}{5^k}$$

$k = 1, 2, \cdots, 2n$として足して②から

$$\sum_{k=1}^{2n} \left(\frac{10^n}{5^k} - 1 \right) < f(10^n) \leq \sum_{k=1}^{2n} \frac{10^n}{5^k}$$

$$10^n \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1 - (1/5)^{2n}}{1 - 1/5} - 2n < f(10^n) \leq 10^n \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1 - (1/5)^{2n}}{1 - 1/5}$$

両辺10^nでわって

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{1 - (1/5)^{2n}}{4/5} - \frac{2n}{10^n} < \frac{f(10^n)}{10^n} \leq \frac{1}{5} \cdot \frac{1 - (1/5)^{2n}}{4/5}$$

この両辺共に$n \to \infty$で $\frac{1}{4}$ に収束するから、はさみうちより

$$f(10^n)/10^n \longrightarrow 1/4$$ //

第 2 問

[解] $C: x^2+\frac{y^2}{4}=1,\ z=0$ とおく。$c=\cos\theta,\ s=\sin\theta\ (0\leq\theta<2\pi)$ とすると、C上の点 $(c,2s,0)$ での接線は

$$l: cx+\frac{s}{2}y=1\ ,\ z=0$$

である。π に含まれる2つの1次独立なベクトルに

$$\vec{a}=\begin{pmatrix} s \\ -2c \\ 0 \end{pmatrix}\quad \vec{b}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-c \\ 1-2s \\ 1-0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-c \\ 1-2s \\ 1 \end{pmatrix}$$

があるから平面πの法線ベクトルの1つに

$$\vec{n}=\begin{pmatrix} 2c \\ s \\ 2-(c+s) \end{pmatrix}$$

がある。したがって

$$\pi: 2c(x-c)+s(y-2s)+\{2-(c+s)\}z=0$$

とかける。$x=y=0$の時、

$$-2c^2-2s^2+\{2-(c+s)\}z=0$$

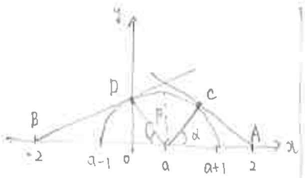
$$z=\frac{2}{2-(c+s)} \quad \cdots①$$

である。ここで $c+s=\sqrt{2}\sin(\theta+\pi/4)$ から $0\leq\theta<2\pi$ では $-\sqrt{2}\leq c+s\leq\sqrt{2}$ だから、$2-\sqrt{2}\leq 2-(c+s)\leq 2+\sqrt{2}$ となり、①から、

$$\frac{2}{2+\sqrt{2}}\leq z\leq\frac{2}{2-\sqrt{2}}$$

$$2-\sqrt{2}\leq z\leq 2+\sqrt{2}$$ //

第 3 問



[解] E(a,0)とする。∠CEA=α, ∠BED=βとする。(0<α, β<π/2) この時

$C(a+\cos\alpha, \sin\alpha)$

$D(a-\cos\beta, \sin\beta)$

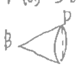
だから、C, Dでの円の接線 l_C, l_D は

$$\begin{cases} l_C: (a+\cos\alpha)(x-a)+\sin\alpha\cdot y=1 \\ l_D: (a-\cos\beta)(x-a)+\sin\beta\cdot y=1 \end{cases} \quad \cdots ①$$

これらが各々 A, B を通る条件から、

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{1}{2-a} \\ \cos\beta = \dfrac{1}{2+a} \end{cases} \quad \cdots ②$$

題意の体積 $V(a)$ とする。

$V(a) =$  $+$  $+$  $\cdots ③$

であり、

 $= \frac{1}{3}\cdot(\pi\sin^2\beta)\cdot(a-\cos\beta+2)$

$$= \frac{\pi}{3}\left(1-\left(\frac{1}{2+a}\right)^2\right)\left(a+2-\frac{1}{2+a}\right)$$

$$= \frac{\pi}{3}\,\frac{\{(2+a)^2-1\}^2}{(2+a)^3}$$

 $= \pi\int_{a-\cos\beta}^{a+\cos\alpha}\{1-(x-a)^2\}dx$

$$= \pi\int_{-\cos\beta}^{\cos\alpha}(1-x^2)dx$$

$$= \pi\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-\frac{1}{2+a}}^{\frac{1}{2-a}} \qquad (\because ②)$$

$$= \pi\left\{\left(\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2+a}\right)-\frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{2-a}\right)^3+\left(\frac{1}{2+a}\right)^3\right)\right\}$$

 $= \frac{1}{3}(\pi\sin^2\alpha)(2-a-\cos\alpha)$

$$= \frac{\pi}{3}\left(1-\left(\frac{1}{2-a}\right)^2\right)\left(2-a-\frac{1}{2-a}\right)$$

$$= \frac{\pi}{3}\,\frac{\{(2-a)^2-1\}^2}{(2-a)^3}$$

上③に代入して、

$$V(a) = \frac{\pi}{3}\left[\frac{\{(2-a)^2-1\}^2}{(2-a)^3}+\frac{\{(2+a)^2-1\}^2}{(2+a)^3}-\frac{1}{(2-a)^3}-\frac{1}{(2+a)^3}\right]+\pi\left[\frac{1}{2+a}+\frac{1}{2-a}\right]$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[\frac{(a+2)^2(a^2+4a+2)}{(2+a)^3}+\frac{(a-2)^2(a^2-4a+2)}{(2-a)^3}\right]+\pi\left[\frac{1}{2+a}+\frac{1}{2-a}\right]$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[\frac{a^2+4a+2+3}{2+a}+\frac{a^2-4a+2+3}{2-a}\right]$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[a+2+\frac{1}{2+a}+2-a+\frac{1}{2-a}\right]$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(4+\frac{1}{2+a}+\frac{1}{2-a}\right)$$

//

第 4 問

[解] $f(x)=x^3+ax^2+(b-a-1)x$

(1) $f'(x)=3x^2+2ax+(b-a-1)$ だから. これが $x\geqq 0$ で0以上であるような $(a.b)$ を求めれば良い。$(a.b\in\mathbb{R})$ 軸: $x=-\frac{1}{3}a$ で場合分け。

1° $-\frac{1}{3}a\leqq 0$ ∴ $a\geqq 0$ の時

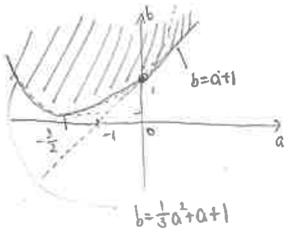
条件は $f'(0)\geqq 0 \Leftrightarrow b\geqq a+1$

2° $0\leqq -\frac{1}{3}a$ ∴ $a\leqq 0$ の時

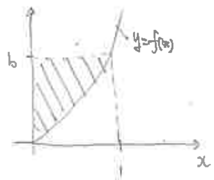
条件は. $f'(-\frac{1}{3}a)\geqq 0 \Leftrightarrow b\geqq \frac{1}{3}a^2+a+1$

以上をまとめ, 図示して右図斜線部

$$\begin{cases} a\leqq 0 \text{ の時 } b\geqq \frac{1}{3}a^2+a+1 \\ a\geqq 0 \quad〃 \quad b\geqq a+1 \end{cases} \cdots\ast$$



(2) (a,b) が G をうごく時. $0\leqq x$ で $f(x)$ は単調増加かつ $f(1)=b$ から. グラフの概形は右図で. 斜線部が求める面積に等しい。



したがって. 与式 S として

$$S=b-\int_0^1 f(x)dx$$
$$=b-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}(b-a-1)\right)$$
$$=\frac{1}{2}b+\frac{1}{6}a+\frac{1}{4} \qquad \cdots①$$

である。a を固定すると, $\ast$ から.

◦ $a\leqq 0$ の時. $\min S=\frac{1}{6}a+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}a^2+a+1\right)+\frac{1}{4}$
$$=\frac{1}{6}a^2+\frac{2}{3}a+\frac{3}{4}$$
$$=\frac{1}{6}(a+2)^2+\frac{1}{12}\geqq\frac{1}{12} \quad (\text{等号成立は } a=-2)$$

◦ $a\geqq 0$ の時. $\min S=\frac{1}{6}a+\frac{1}{2}(a+1)+\frac{1}{4}$
$$=\frac{2}{3}a+\frac{3}{4}\geqq\frac{3}{4} \quad (〃 \ a=0)$$

だから. $\min S=\frac{1}{12}$

第 5 問

[解] $f(x)=x^3-ax^2+bx-c$ とおく。$f(x)=0$ が整数解 $x=k$ を持つ時，

$$c=k(k^2-ak+b) \quad \cdots ①$$

$c=1,2,\cdots,6$ だから下表を得る。(複号同順) ただし，$k<0$ の時，$k^2-ak+b>0$ から不適。

c	(k, k^2-ak+b)
1	$(1,1)$ ①
2	$(2,1)$ ② $(1,2)$ ③
3	$(3,1)$ ④ $(1,3)$ ⑤
4	$(4,1)$ ⑥ $(2,2)$ ⑦ $(1,4)$ ⑧
5	$(5,1)$ ⑨ $(1,5)$ ⑩
6	$(6,1)$ ⑪，$(3,2)$ ⑫ $(2,3)$ ⑬ $(1,6)$ ⑭

①の時，$a=b$ 　$(a,b)=(1,1),(2,2)(3,3)(4,4)(5,5)(6,6)$

② 〃 $-2a+b=-3$ 　$(a,b)=(2,1)(3,3)(4,5)$

③ 〃 $-a+b=1$ 　$(a,b)=(1,2)(2,3)(3,4)\cancel{(4,5)}(5,6)$

④ 〃 $-3a+b=-8$ 　$(a,b)=(3,1)(4,4)$

⑤ 〃 $-a+b=2$ 　$(a,b)=(1,3)(2,4)(3,5)(4,6)$ 　　$b=2a-3$

⑥ 〃 $-4a+b=-15$ 　$(a,b)=(4,1)(5,5)$ 　　$3a-8$

⑦ 〃 $-2a+b=-2$ 　$(a,b)=(2,2)(3,4)(4,6)$ 　　$4a-15$

⑧ 〃 $-a+b=3$ 　$(a,b)=(1,4)(2,5)(3,6)$

⑨ 〃 $-5a+b=-24$ 　$(a,b)=(5,1)(6,6)$

⑩ 〃 $-a+b=4$ 　$(a,b)=(1,5)(2,6)$ 　　$5a-24$

⑪ 〃 $-6a+b=-35$ 　$(a,b)=(6,1)$

⑫ 〃 $-3a+b=-7$ 　$(a,b)=(3,2)(4,5)$ 　　$3a-7$

⑬ 〃 $-2a+b=-1$ 　$(a,b)=(1,1)(2,3)(3,5)$ 　　$2a-1$

⑭ 〃 $-a+b=5$ 　$(a,b)=(1,6)$

したがって，あわせて38通りだから，$\frac{38}{6^3}=\frac{19}{108}$

3.31