T. K. 大 前期数学 1990

東工大

第 1 問

[解] $x, y, z, w > 0$ …① 文字kに対し．$k^{\frac{1}{m}} = K$とおく．

$$(X+Y)^n + (Z+W)^n = \{(X^n+Z^n)^{\frac{1}{n}} + (Y^n+W^n)^{\frac{1}{n}}\}^n \quad \cdots ②$$

②が任意の(m, n)で成立するので．$(m, n \in \mathbb{N})$．$n=2$での成立が必要。

$$2XY + 2ZW = 2\sqrt{(X^2+Z^2)(Y^2+W^2)} \quad \cdots ③$$

①から．③の両辺正で．2乗しても良く．

$$(XY+ZW)^2 = (X^2+Z^2)(Y^2+W^2)$$

$$2XYZW = X^2W^2 + Y^2Z^2$$

$$(XW - YZ)^2 = 0$$

$$XW = YZ \quad \cdots ④$$

が必要。逆に④が成り立つ時．$\begin{pmatrix} Z \\ W \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ $(k \in \mathbb{R}_{>0})$ とおける．

$$(②の左辺) = (X+Y)^n + k^n(X+Y)^n = (1+k^n)(X+Y)^n$$

$$(②の右辺) = \{(1+k^n)^{\frac{1}{n}} X + (1+k^n)^{\frac{1}{n}} Y\}^n$$

$$= (1+k^n)(X+Y)^n$$

となり．たしかに②は成立して十分．

以上から

$$XW = YZ$$

つまり

$$xw = yz \quad //$$

第 2 問

[解] $\begin{cases} x_i > 0 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = k \end{cases}$ …①

$A_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i$, $B_n = k\log\frac{k}{n}$ とおく.「$A_n \geq B_n$ …② が任意の

$n \in \mathbb{N}$ で成立すること」…③ を帰納法で示す. $n=1$の時の成立は

明らかなので. $n=p$ での③の成立を仮定し, $n=p+1$でも成立することを

示す.

$p+1$コの正数 x_i $(i=1,2,\cdots p+1)$に対し, $\sum_{i=1}^{p+1} x_i = k$とし,

$\sum_{i=1}^{p} x_i = l$ $(0<l<k)$ とおく. まずはlを固定する

$$A_{p+1} = A_p + x_{p+1}\log x_{p+1}$$
$$\geq l\log\frac{l}{p} + (k-l)\log(k-l) = f(l) \quad (\because 仮定) \quad ‥②$$

次にlをうごかす

$$f'(l) = 1+\log l - \log p - \log(k-l) - 1 = \log\frac{l}{k-l} - \log p$$

$\log x$がxの単調増加関数であるから下表を得る. $(l, k, p > 0, k-l > 0)$

l	0		$\frac{pk}{p+1}$		k
f'		$-$	0	$+$	
f		↘		↗	

よって

$$f(l) \geq \frac{pk}{p+1}\log\frac{k}{p+1} + \frac{k}{p+1}\log\frac{k}{p+1}$$
$$= k\log\frac{k}{p+1} = B_{p+1} \quad ‥③$$

②,③から

$$A_{p+1} \geq B_{p+1}$$

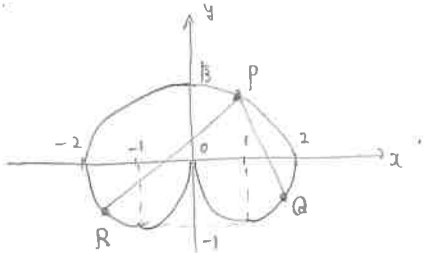
よりn=p+1でも ②は成立。

以上から③は示された 間

第 3 問

[解] $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$, $C_1:(x-1)^2+y^2=1$, $C_2:(x+1)^2+y^2=1$ とおく

対称性から、Pが $x\geq 0$ にあるとして良い。Pをこの範囲内で $P(X,Y)$ と固定し、R, Q をうごかす。



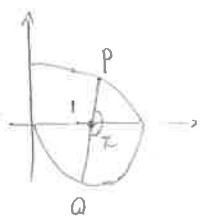
まず、PQについて考える。以下 $s=\sin\theta$, $c=\cos\theta$ と書くことにすると、

$Q(1+c, s)$ $(\pi\leq\theta\leq 2\pi)$ とおけて、

$$\overline{PQ}^2=(1+c-X)^2+(s-Y)^2$$
$$=(1+c)^2+s^2+X^2+Y^2-2X(1+c)-2Ys$$
$$=X^2+Y^2-2(X-1)(c+1)-2Ys$$

ここで、$(X-1)(c+1)+Ys=\begin{pmatrix}X-1\\Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c+1\\s\end{pmatrix}$ から、$\overline{PQ}^2$ は PQが(1, 0)を通る時に最大で、$\overline{PQ}\geq 0$ から、この時 $\overline{PQ}$ も最大。

同様のことが $\overline{PR}$ についても言える。そこで、$F_1(1,0)$, $F_2(-1,0)$ とおくと



$$\max(\overline{PQ}+\overline{PR})=PF_1+PF_2+2$$
$$=6$$
//

第 4 問

Ok

[解]: $0<x<\pi/2$ …①

$$f(x)=\int_0^x \frac{d\theta}{\cos\theta}+\int_x^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sin\theta}$$

$$f'(x)=\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\sin x}=\frac{S-C}{CS}$$ ($S=\sin x$, $C=\cos x$) から、下表を得る

x	0		$\pi/4$		$\pi/2$
f'		$-$	0	$+$	
f		↘		↗	

したがって、$f(x)$は$x=\pi/4$で最小。

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sin\theta}=\int_{\pi/4}^{0}\frac{-dt}{\sin(\pi/2-t)} \qquad (t=\pi/2-\theta)$$

$$=\int_0^{\pi/4}\frac{d\theta}{\cos\theta}$$

からこの時

$$f(\pi/4)=2\int_0^{\pi/4}\frac{d\theta}{\cos\theta}$$

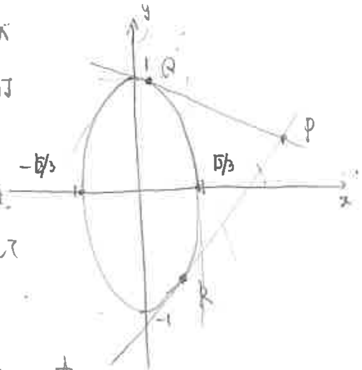
$$=2\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{1}{1-x^2}\,dx$$

$$=\Big[+\log(x+1)-\log(1-x)\Big]_0^{\sqrt{2}/2}$$

$$=\log\frac{1+\sqrt{2}/2}{1-\sqrt{2}/2}=\log\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$$ //

第 5 問

[解] Pから引いた接線がy軸と平行になる時、(i)からPのx座標が$\sqrt{3}/3$である。このうち(ii)をみたすのはPのy座標が$|y|\leq 1$をみたす時。以下、他の場合を考える。



この時Pから引いた接線lとして

$$l: y=m(x-a)+b$$

とおける。$m\in\mathbb{R}$, P(a,b)とした。…☆

ここで、$X=\sqrt{3}x$, $Y=y$なる変換を考える。この変換によって図形AがA'にうつると表す。楕円は$X^2+Y^2=1$に、lはl'にうつり、l'と円$X^2+Y^2=1$は接している。

$$l': Y=m\left(\frac{\sqrt{3}}{3}X-a\right)+b$$

で、接する条件から

$$\frac{|-am+b|}{\sqrt{\frac{1}{3}m^2+1}}=1$$

両辺0以上から2乗して良く、

$$\left(a^2-\frac{1}{3}\right)m^2-2abm+b^2-1=0 \quad \cdots ①$$

mの2次方程式①の2実解m_1, m_2 $(m_1\leq m_2)$とする。

(①の判別式Dとして

$$D/4=a^2b^2-\left(a^2-\frac{1}{3}\right)(b^2-1)=a^2+\frac{1}{3}b^2-\frac{1}{3}\geq 0$$

又、$a\neq\sqrt{3}/3$から①は2次式)

まず、条件(i)を考える。(i)がみたされる時、A$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$として線分AP上の点

B$\left(t(a-\sqrt{3}/3)+\sqrt{3}/3,\ tb\right)$ $(0\leq t\leq 1)$と楕円の共有点がAのみであるから

$$3\{t(a-\sqrt{3}/3)+\sqrt{3}/3\}^2+t^2b^2=1$$

$$\{3(a-\sqrt{3}/3)^2+b^2\}t^2+2\sqrt{3}(a-\sqrt{3}/3)t=0$$

の$t\neq 0$の解が負ならば良く、

$$a-\sqrt{3}/3\geq 0 \iff a\geq\sqrt{3}/3 \quad \cdots ②$$

次に、(ii)をかんがえる。$\angle QPR\geq\angle R$の時、$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}\leq 0$である

$$\begin{pmatrix}-1\\m_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\m_2\end{pmatrix}\leq 0 \quad \therefore 1+m_1m_2\leq 0$$

①から $m_1m_2=(b^2-1)/(a^2-\frac{1}{3})$ なから 代入して

$$1\leq\frac{1-b^2}{a^2-\frac{1}{3}}$$

②から、$a^2-\frac{1}{3}\geq 0$だから

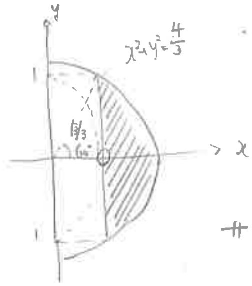
$$a^2-\frac{1}{3}\leq 1-b^2 \qquad \therefore\ a^2+b^2\leq\frac{4}{3} \quad \cdots ③$$

②③と、前半部のギロンにより、図示するのは下図斜線部(境界含む)で、面積Sとして

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{4}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}\right)$$

//



//