T.K 大 数学 1989

ok

第 1 問

[解] Q(α,α^2) R(β,β^2) $(\alpha<\beta)$とおいて良い。この時 Q,Rでの接線は各々

$$\begin{cases} y=2\alpha x-\alpha^2 \\ y=2\beta x-\beta^2 \end{cases}$$

だから、Pはこの交点で、$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha\beta\right)$である。Pは$y=x^2$の下側だから、

$$\alpha\beta<\frac{1}{4}(\alpha+\beta)^2 \quad \therefore (\alpha-\beta)^2>0$$

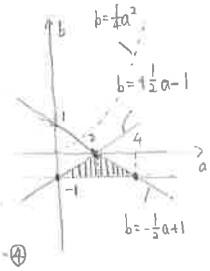
これは$\alpha<\beta$から常にみたされる。そこで、α,βが、$a=\alpha+\beta$, $b=\alpha\beta$とした時実数条件及び題意から

$$\begin{cases} b\leq \frac{1}{2}a-1,\ -\frac{1}{2}a+1 \\ -1\leq b,\ b\leq\frac{1}{4}a^2 \end{cases} \quad \cdots ①$$

をみたしながら動く時のQRの中点M(X,Y)のキセキを求めれば良い。

$$\begin{cases} X=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}a \\ Y=\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)=\frac{1}{2}(a^2-2b) \end{cases} \quad \cdots ②$$

であり、①を図示すると右図斜線部(境界含む)だから、



$$\begin{cases} -1\leq b\leq +\frac{1}{2}a-1 & (0\leq a\leq 2) \\ -1\leq b\leq -\frac{1}{2}a+1 & (2\leq a\leq 4) \end{cases} \quad \cdots ③$$

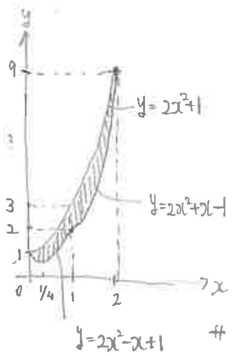
②③から

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}a+1\leq Y\leq \frac{1}{2}a^2+1 & (0\leq a\leq 2) \\ \frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a-1\leq Y\leq\frac{1}{2}a^2+1 & (2\leq a\leq 4) \end{cases} \quad \cdots ④$$

④に②を代入して

$$\begin{cases} 2X^2-X+1\leq Y\leq 2X^2+1 & (0\leq X\leq 1) \\ 2X^2+X-1\leq Y\leq 2X^2+1 & (1\leq X\leq 2) \end{cases}$$

これが求める領域で、図示して右図斜線部



(2) $\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}\alpha-\frac{\alpha+\beta}{2} \\ \alpha^2-\alpha\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\alpha-\beta}{2} \\ \alpha(\alpha-\beta)\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{PR}=\begin{pmatrix}\beta-\frac{\alpha+\beta}{2} \\ \beta^2-\alpha\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\beta-\alpha}{2} \\ \beta(\beta-\alpha)\end{pmatrix}$ だから、

サラスの公式から、

$$\triangle PQR=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\beta(\beta-\alpha)-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\alpha(\alpha-\beta)\right|$$

$$=\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^3 \quad (\because \beta>\alpha) \quad \cdots ⑤$$

ここで、β,αはtの2次方程式$t^2-at+b=0$の2実解で$t=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$でかつ$\alpha<\beta$から

$$\beta-\alpha=\sqrt{a^2-4b} \quad \cdots ⑥$$

なので、⑥を⑤に代入して。

$$\triangle PQR=\frac{1}{4}(a^2-4b)^{\frac{3}{2}}$$

$\triangle PQR=2$の時

$$8=(a^2-4b)^{3/2} \iff 4=a^2-4b \quad (\because a^2-4b>0)$$

だから、P(X,Y)について$X=\frac{1}{2}a$, $Y=b$だから、

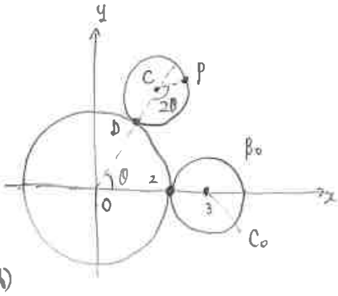
$$Y=X^2-1$$

である。

Ok

第 2 問

[解] $A: x^2+y^2=4$, $B_0: (x-3)^2+y^2=1$ とおく



B_0の中心C_0, Bの中心C, AとBの接点をDとおく。$\angle DOC_0=\theta$ $(0\le\theta\le 2\pi)$の時, 弧$DP=2\theta$

(P→Dまで Aと接していた方の弧)

だから, $\angle PCD$ (弧DPを含む方) $=2\theta$ であり, Pの座標$P(X, Y)$は

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} = 3\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(3\theta-\pi) \\ \sin(3\theta-\pi) \end{pmatrix}$$

$$= 3\begin{pmatrix} C \\ S \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos 3\theta \\ \sin 3\theta \end{pmatrix}$$

となり $(C=\cos\theta,\ S=\sin\theta)$

$$\frac{dX}{d\theta} = -3S+3(3S-4S^3) = 3S(2-4S^2)$$

$$\frac{dY}{d\theta} = 3C-3(4C^3-3C) = 3C(4-4C^2)$$

より下表となる。ただし, $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\Big|_{\theta=t}$ と $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\Big|_{\theta=2\pi-t}$ $(0\le t\le\pi)$ がx軸に関して対称なので, $0\le\theta\le\pi$ とした

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\pi/2$		$\frac{3}{4}\pi$		π
X		+	0	−	−	−	0	+	
Y		+	+	+	0	−	−	−	
	(2,0)	↗	$(2\sqrt2,\sqrt2)$	↖	(0,2)	↙	$(-2\sqrt2,\sqrt2)$	↘	(−2,0)

したがって, Cでx座標が最大なのは, $(2\sqrt2, \pm\sqrt2)$ である。

又, Cの長さlとして, (X, Y)がy軸についても対称なことから,

$$\frac{l}{4} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{[3S(2-4S^2)]^2+[12C(1-C^2)]^2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{36S^2(1-2S^2)^2+144C^2S^4}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{36\sin^2\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} 6\sin\theta\, d\theta \qquad (\because \sin\theta\ge 0)$$

$$= 6\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/2} = 6$$

$$l = 24$$

ok

第 3 問

[解] $f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y)$ ‥①

(1) $\dfrac{f(x+y)-f(x)}{y} = \dfrac{f(y)(1+f(x))}{y} \longrightarrow f'(0)(1+f(x)) \quad (y\to 0)$

より示すべきことは明らか. 圏

(2) $a = f'(0)$とおく. まず①で $(x,y)=(0,0)$として.

$$f(0)(1+f(0))=0$$

$$\therefore f(0)=0,-1 \quad ‥②$$

である。(1)から, $y=f(x)$とおくと,

$$\frac{dy}{dx} = a(1+y) \quad ‥③$$

$a=0$の時, $y=C$ (C:定数)とおける。①に代してC=0だから.

$f(x)=0$は解の1つ。以下 $a\neq 0$とする. ③から

$$\frac{dy}{1+y} = a\,dx$$

積分して

$$\log(1+y) = ax + C_1$$

$$y = C\cdot e^{ax} - 1$$

とおける. ただし, C, C_1は定数. ②に代入して. $C=0,1$である

1° $C=1$の時

$y=e^{ax}-1$だから.①に代入すると

(左辺) $= e^{a(x+y)}-1$

(右辺) $= e^{ax}+e^{ay}-2+(e^{ax}-1)(e^{ay}-1)$

$= e^{a(x+y)}-1$

となって恒等的に①は成立.

2° $C=0$の時

$y=-1$となり. 不適

以上から

$$y = 0,\ e^{f'(0)x}-1$$

〃

T. K. 前 1980

第 4 問

[解] $I_n=\int_0^{\pi}x^2|\sin nx|dx$, $a_k=\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}x^2|\sin nx|dx$, $f(x)=x^2$とし,

$\left[\frac{k-1}{n}\pi,\frac{k}{n}\pi\right]$で$f(x)$のmax. minを与える$x$を$M_k$, m_kとする。$|\sin nx|\geqq 0$から.

$$f(m_k)|\sin nx|\leqq f(x)|\sin nx|\leqq f(M_k)|\sin nx|$$

積分して,

$$f(m_k)\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}|\sin nx|dx\leqq a_k\leqq f(M_k)\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}|\sin nx|dx \quad \cdots ①$$

ここで $\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}|\sin nx|dx=\frac{2}{n}$だから. ①から.

$$\frac{2}{n}f(m_k)\leqq a_k\leqq\frac{2}{n}f(M_k)$$

kについて和をとって

$$\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}f(m_k)\leqq I_n\leqq\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}f(M_k) \quad \cdots ②$$

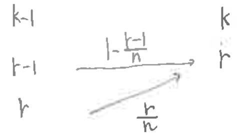
ここで区分求積から$n\to\infty$として

$$\begin{cases}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(m_k)\longrightarrow\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{3}\pi^2\\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(M_k)\longrightarrow\frac{1}{3}\pi^2\end{cases}$$

だから. ②及びはさみうちから.

$$I_n\longrightarrow\frac{2}{3}\pi^2$$

[解]



(1) 上図から

$$P(S_k=r)=\frac{n+1-r}{n}P(S_{k-1}=r-1)+\frac{r}{n}P(S_{k-1}=r) \quad /\!/ \qquad \left(\begin{array}{l} r\neq 1,2,\cdots,k\text{の時に} \\ P(S_k=r)=0\text{とする} \end{array}\right)$$

(2) 確率変数 X_t を、

$$X_t=\begin{cases} 0 & (t\text{のカードを}k\text{回目までに引いた.}) \\ 1 & (\quad〃\quad\text{引かなかった}) \end{cases}$$

と定めると, $S_k=\sum_{t=1}^{n}X_t$ だから. 期待値の和公式から

$$E(S_k)=E\left(\sum_{t=1}^{n}X_t\right)=\sum_{t=1}^{n}E(X_t)=nE(X_1) \quad (\because\text{対称性}) \cdots ①$$

である。k回目までに1のカードを引く確率 q_k は, 排反をかんがえて.

$$q_k=1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^k$$

で: $E(X_1)=0\cdot P(X_1=0)+1\cdot P(X_1=1)=P(X_1=1)=q_k$ だから. ①より.

$$E_k=n\left\{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right\} \quad /\!/$$

[別解]

(2) (1)の両辺 r をかけて r について和をとる.

$$\sum_{r=1}^{k}rP(S_k=r)=\sum_{r=1}^{k}\frac{r^2}{n}P(S_{k-1}=r)+\sum_{r=1}^{k}\frac{nr-r(r-1)}{n}P(S_{k-1}=r-1)$$

$P(S_{k-1}=k)=0$ だから.

$$E_k=\sum_{r=1}^{k-1}\frac{r^2}{n}P(S_{k-1}=r)+\sum_{r=1}^{k}\frac{(n-1)(r-1)+n-(r-1)^2}{n}P(S_{k-1}=r-1)$$

$$=\sum_{r=1}^{k-1}\frac{r^2}{n}P(S_{k-1}=r)+\frac{n-1}{n}E_{k-1}+\sum_{r=1}^{k}P(S_{k-1}=r-1)-\sum_{r=1}^{k}\frac{(r-1)^2}{n}P(S_{k-1}=r-1)$$

$\sum_{k=1}^{r}P(S_{k-1}=r-1)=1$ から

$$E_k=\frac{n-1}{n}E_{k-1}+1$$

だから. $E_1=1$ より

$$E_k=n\left\{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right\} \quad /\!/$$