T. K. 大 数学 1988

第 1 問

[解] $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2}a_n^2+1$, $a_1=1$ …①

$n\geq 2$の時. $a_n<1+\frac{1}{n}$ であることをキノウ的に示す. $a_2=\frac{5}{4}$, $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=\frac{6}{4}$ より.
$n=2$では成立。以下 $n=k$ ($k\geq 2$) での成立をカテイし, $n=k+1$ での成立を示す. ①より

$$a_{k+1}<\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^2}{(k+1)^2}+1=1+\frac{1}{k^2}<1+\frac{1}{k+1}\quad(\because k\geq 2 より)$$

$$\left(k^2-k-1=\left(k-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(k-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right),\ 2>\frac{1+\sqrt{5}}{2} より\right)$$

だから. $n=k+1$でも成立。以上から. $a_n<1+\frac{1}{n}$ 。一方. ①から $1<a_n$ だから

$$1\leq a_n<1+\frac{1}{n}\qquad (a_1=1,\ 1+1=2 より)$$

はさみうちから $a_n\to 1$ //

T.K. 前 1988 2

$g'(x)=2ax+b$

第 2 問

[解1] $g(x)=ax^2+bx$ とおくと, $f'(x)=g'(x)=2ax+b$ で, 又題意から $g(x)$ の $-1\le x\le 1$ での値域の幅が2以下であるから.

$$\begin{cases}-2\le g(1)-g(0)\le 2\\ -2\le g(-1)-g(0)\le 2\end{cases} \Leftrightarrow -2\le \pm a+b\le 2 \quad \cdots ①$$

が成立する。さらに $g'(1)=2a+b$ である。

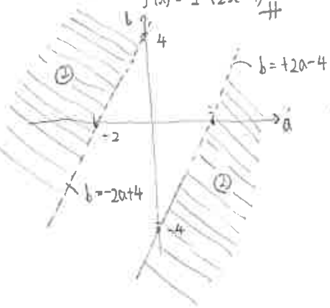
ここで, 題意が成立しないと仮定すると,

$$|2a+b|>4 \quad \cdots ②$$

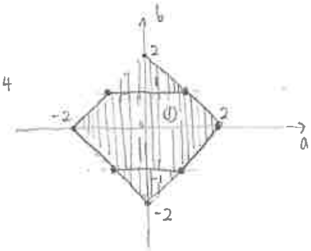
ところが, ①∧②をみたす (a,b) は存在せず. 不適。よって背理法から題意は成立。図

(2) ①∧ $|2a+b|=4$ から 下図を参照して. $(a,b)=(\pm 2,0)$ が必要。逆にこの時. $g(x)=\pm 2x^2$ の値域の幅は2であり十分で. $|f(x)|\le 1$ となるように平行移動してCを定めて. $(a,b,c)=(\pm 2, 0, \mp 1)$ (複号同順)だから.

$f(x)=\pm(2x^2-1)$ //



(境界含まず)



(境界含む)

[解2] (全て求しに行く)

$a=0$ での成立は明らかだから. 以下対称性から $a>0$ とする。

$$g(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}$$

であり. 区間内での最大小値は以下のようになる。

	㋐ $-1\le -\frac{b}{2a}\le 0$	㋑ $0\le -\frac{b}{2a}\le 1$	㋒ otherwise
max g	$g(1)=a+b$	$g(-1)=-a+b$	$a\pm b$ のうち小さくない方
min g	$g(-\frac{b}{2a})=-\frac{b^2}{4a}$	$g(-\frac{b}{2a})=-\frac{b^2}{4a}$	$a\pm b$ のうち大きくない方

㋐.㋑の対称性から, ㋐, ㋒のみかんがえる。

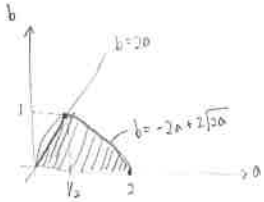
㋐の時

$a>0$ から. $0\le b\le 2a$ である。これと $\left|a+b+\frac{b^2}{4a}\right|\le 1$ ∴ $a+b+\frac{b^2}{4a}\le 1$ から.

$$b^2+4ab+4a^2-8a\le 0$$

$$0\le b\le -2a+2\sqrt{2a}$$

だから. これを図示して右上図斜線部(境界含む)だから.



$2a+b=k$ との交点から.

$$0\le 2a+b\le 4$$

右の等号成立は $(a,b)=(2,0)$ の時.

(したがって㋒の時も $(a,b)=(2,0)$ で $2a+b=4$ となる)

㋒の時

軸の条件から.

$$-\frac{b}{2a}\le -1 \quad \text{or} \quad 1\le -\frac{b}{2a}$$

$a>0$ から

$$2a\le b \quad \text{or} \quad b\le -2a \quad \cdots ①$$

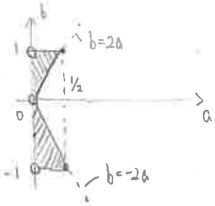
である。又. 値域の幅の条件から

$$-2\le |(a+b)-(a-b)|\le 2.$$

$$-1\le b\le 1 \quad \cdots ②$$

である。①.②を図示して右図斜線部

(境界は $a=0$ のみ含まず)



したがって これと $2a+b=k$ の交点をかんがえて.

$$-1<2a+b\le 2$$

だから $|2a+b|<4$

以上から. $|2a+b|\le 4$ は成立し, 等号成立は対称性から $(a,b)=(\pm 2,0)$ の時。

(以下略)

Tk. 88

第 3 問

[解] $A: x^2+y^2=r^2$, $B: y=\cos\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}x\right)$ とおく. AとBの共有点の数はyを消した

$$x^2+\cos^2\left(\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}x\right)=r^2 \quad \cdots ①$$

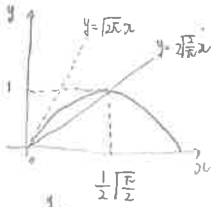
の解の数に等しい。この左辺f(x)とおく. f(x)は偶関数だから, $x\geqq 0$でかんがえる.

$$f'(x)=2x+2\cos\left(\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}x\right)\left(-\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\sin\left(\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}x\right)\right)$$

$$=2x-\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\sin\left(\sqrt{2\pi}x\right)$$

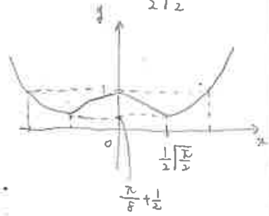
より

$$f'(x)\geqq 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}x \geqq \sin\left(\sqrt{2\pi}x\right)$$



だから右図から下表を得る.

x	0		$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		↘		↗	$+\infty$



したがってグラフは右上図. よって解は

$$\begin{cases} 0<r^2<\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2} \text{ の時 } 0\text{コ} \\ r^2=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2} \quad 〃 \quad 2\text{コ} \\ \frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}<r^2<1 \quad 〃 \quad 4\text{コ} \\ r^2=1 \quad 〃 \quad 3\text{コ} \\ 1<r^2 \quad 〃 \quad 2\text{コ} \end{cases}$$

だから

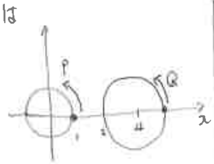
$$N(r)=\begin{cases} 0 & \left(0<r<\sqrt{\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}}\right) \\ 2 & \left(r=\sqrt{\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}},\ 1<r\right) \\ 3 & (r=1) \\ 4 & \left(\sqrt{\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}}<r<1\right) \end{cases}$$

//

第 4 問

[解] $C: x^2+y^2=1$, $D: (x-4)^2+y^2=4$ 時刻tでのP, Qの座標は

$$P(\cos 2t, \sin 2t),\quad Q(4+2\cos t, 2\sin t)$$



とかける。以下$c=\cos t$, $s=\sin t$とおく。

$$\overline{PQ}^2 = (\cos 2t - 2\cos t - 4)^2 + (\sin 2t - 2\sin t)^2$$
$$= (\cos^2 2t + \sin^2 2t) + \{(2c+4)^2 + 4s^2\} - 2(2c+4)\cos 2t - 4s\sin 2t$$
$$= 1 + (4 + 16 + 16c) - 4(c + 2\cos 2t)$$
$$= 21 + 16c - 4c - 16c^2 + 8$$
$$= -16c^2 + 12c + 29$$
$$= -16\left(c - \frac{3}{8}\right)^2 + 29 + \frac{9}{4}$$

から $-1 \leq c \leq 1$ とあわせて、

1° maxについて

$c = \frac{3}{8}$で $\max PQ = \frac{5\sqrt{5}}{2}$，この時 $P\left(-\frac{23}{32}, \pm\frac{3\sqrt{55}}{32}\right)$, $Q\left(\frac{19}{4}, \pm\frac{\sqrt{55}}{4}\right)$（複号同順）

2° minについて

$c = -1$で $\min PQ = 1$　この時 $P(1, 0)$ $Q(2, 0)$

である。

T.k.88

第 5 問

[解] $\dfrac{{}_{3n}C_n}{{}_{2n}C_n} = \dfrac{(3n)!}{n!(2n)!}\dfrac{n!n!}{(2n)!} = \dfrac{(3n)!\,n!}{(2n)!\,(2n)!} \equiv f(n)$ とおく. $f(n)>0$

より. $g(n)=\log f(n)^{\frac{1}{n}}$ とおくと

$$g(n)=\frac{1}{n}\left(\sum_{k=2n+1}^{3n}\log\frac{k}{n}-\sum_{k=n+1}^{2n}\log\frac{k}{n}\right) \quad \cdots ①$$

である。ここで

$$\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\log\frac{k}{n}\longrightarrow\int_1^2\log x\,dx=2(\log 2+1)-1$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2n+1}^{3n}\log\frac{k}{n}\longrightarrow\int_2^3\log x\,dx=3(\log 3+1)-2(\log 2+1)$$

だから. ①より

$$g(n)\longrightarrow 3\log 3+4-4\log 2-4=3\log 3-4\log 2=\log\frac{27}{16}$$

より.

$$(与式)\longrightarrow\frac{27}{16} \quad //$$