東工大数学 1987

ok

1987

第1問

[解] $\begin{cases} 0<a<1 \\ 0<c\leq b \end{cases}$ ...①.

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とおく。$f(x)=0$ が3実解 $x=\alpha,\beta,\gamma$ をもつとき $(\alpha<\beta<\gamma)$

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ とかけるので、係数比較して.

$$\begin{cases} a=-(\alpha+\beta+\gamma) \\ b=\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta \\ c=-\alpha\beta\gamma \end{cases}$$

①に代入して

$$\begin{cases} -1<\alpha+\beta+\gamma<0 & \cdots ② \\ \alpha\beta\gamma<0 & \cdots ③ \\ 0\leq\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta+\alpha\beta\gamma & \cdots ④ \end{cases}$$

③と $\alpha<\beta<\gamma$ より. $\alpha<0<\beta<\gamma$ (㋐) か $\alpha<\beta<\gamma<0$ (㋑) である.

㋐の時

$p=\beta+\gamma$, $q=\beta\gamma$ とおくと. β,γ は t の2次方程式 $t^2-pt+q=0$ の正の2異実解だから.

$$\begin{cases} p^2-4q>0 \\ p>0,\ q>0 \end{cases}$$

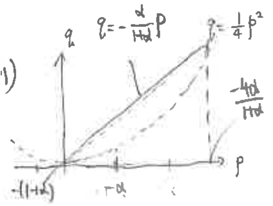
②, ④に代入すると

$$\begin{cases} -1<\alpha+p<0 \\ 0\leq\alpha p+(1+\alpha)q \end{cases} \cdots ⑤$$

$\alpha<0$, $p,q>0$ から. ⑤をみたす p,q があるには $1+\alpha>0$ ∴ $\alpha>-1$ が必要で. このもとで

$$\begin{cases} -1-\alpha<p<-\alpha \\ q\geq-\dfrac{\alpha}{1+\alpha}p \end{cases}$$

以上を図示する. $(-(1+\alpha)<0<-\alpha<1)$ と、空集合になる すなわち これをみたす (α,β,γ) は存在しない.



$\left(\dfrac{1}{4}p^2+\dfrac{\alpha}{1+\alpha}p=\dfrac{1}{4}p\left(p+\dfrac{4\alpha}{1+\alpha}\right)\right.$ であり

$-\dfrac{4\alpha}{1+\alpha}-(-\alpha)=\dfrac{-\alpha(3-\alpha)}{1+\alpha}>0$

より $\left.-\alpha<\dfrac{-4\alpha}{1+\alpha}\right)$

㋑の時

②から. $-1<\alpha<\beta<\gamma<0$ となる

以上 ㋐, ㋑ から. 示された。

行列

第 2 問

T.K. 1987 $\boxed{3}$ 前

第 3 問

[解] (1) △ABCの外接円の半径1として良い。△ABCが鈍角三角形でない時、A(1,0) B($\cos\alpha$, $\sin\alpha$) C($\cos\beta$, $\sin\beta$) $\underline{(0<\alpha\leq\frac{2}{3}\pi,\ \pi\leq\beta\leq\alpha+\pi)}$ ※

とおいて良い。Dの中心O'とし、O'≠Oと仮定する。Dの条件から

$\overline{AD}\leq 1 \wedge \overline{BD}\leq 1 \wedge \overline{CD}\leq 1$

$\Leftrightarrow \overline{AD}^2\leq 1 \wedge \overline{BD}^2\leq 1 \wedge \overline{CD}^2\leq 1$ (∵各辺が0以上)

D(X,Y)とおくと、

$(X-1)^2+Y^2\leq 1 \wedge (X-\cos\alpha)^2+(Y-\sin\alpha)^2\leq 1 \wedge (X-\cos\beta)^2+(Y-\sin\beta)^2\leq 1$ …①

である。3円P,Q,Rを、

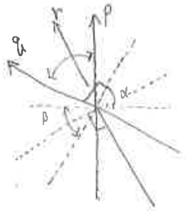
P: $(X-1)^2+Y^2=1$

Q: $(X-\cos\alpha)^2+(Y-\sin\alpha)^2=1$

R: $(X-\cos\beta)^2+(Y-\sin\beta)^2=1$

で定める。P,Q,Rの(0,0)での接線の方向ベクトルは各々$\vec{p}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\\cos\alpha\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}+\sin\beta\\+\cos\beta\end{pmatrix}$ だから、これを図示すると下図(∵※)

Pは$\vec{p}$の右側、Qは$\vec{q}$の上側、Rは$\vec{r}$の左側にあるから P,Q,Rの共有点はO(0,0)のみ、つまり



①⇔(X,Y)=(0,0)

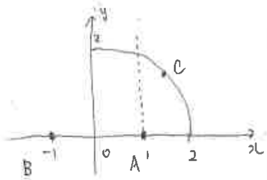
であるが、これは O'≠Oに反し矛盾。以上から示された。

(2) (1)のベクトル図から、△ABCが鈍角三角形になれば①の領域が(0,0)以外に広がり、D≠0となる。したがって、

△ABCが非鈍角三角形⇔D=0 …②

となる。したがって△ABCが鈍角三角形になるようなCのキセキを求めれば良い。

対称性から、0≤x, 0<yでかんがえる。又、C(X,Y)とする。



$\underline{1°\ 1<X\text{の時}}$

∠CAB>π/2となり、△ABCは鈍角三角形。

$\underline{2°\ 0\leq X\leq 1\text{の時}}$

∠CAB≤π/2, ∠CBA≤π/2 だから、∠ACB>π/2となる条件をしらべれば良い。このような条件は

$X^2+Y^2<1$

である。

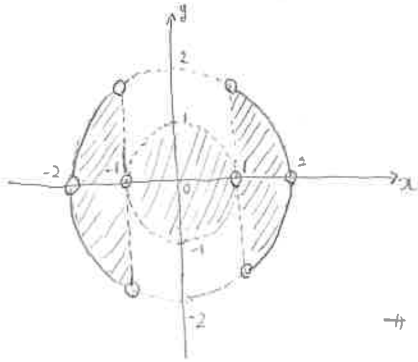
以上1°,2°から、0≤x, 0<yでは、題意の条件は、

$1<X$ or $X^2+Y^2\leq 1$

だから、対称性から求める領域は

$|X|>1$ or $X^2+Y^2<1$ $(Y\neq 0)$

であり、図示して下図斜線部(境界は$x^2+y^2=4$のみ含み、x軸は含まず)



T.K. 1987前 [4]

第 4 問

[解] $x(t)=t+e^{at}$, $y(t)=-t+e^{at}$ とおく。又, $p=e^t$ とする。

$$\begin{cases} x'(t)=1+ap^a \\ y'(t)=-1+ap^a \end{cases} \quad \cdots ①$$

$a>0$ から, $x'(t)>0$ だから

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{-1+ap^a}{1+ap^a} \quad \cdots ②$$

題意から, $y(t)=0$ の時, $\frac{dy}{dx}=0$ なる t がある。$\frac{dy}{dx}=0 \Leftrightarrow a\cdot p^a=1$ (∵②)で,

これをといて, $(a>0)$

$$t=-\frac{1}{a}\log a$$

この時 $y(t)=0$ となるから,

$$\frac{1}{a}\log a+\frac{1}{a}=0 \quad \therefore a=\frac{1}{e} \text{//} \ (>0)$$

(2) ②及び(1)の結果から下表を得る

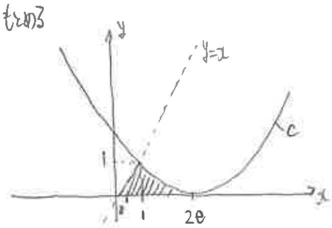
t		e	
x'	+	+	+
y'	−	0	+
(x,y)	↘	$(2e,0)$	↗

$$\begin{cases} t\to+\infty \text{ の時 } x(t), y(t)\longrightarrow+\infty \\ t\to-\infty \text{ の時 } x(t)\longrightarrow-\infty,\ y(t)\longrightarrow+\infty \end{cases}$$

$$x(t)\le y(t) \Leftrightarrow t+e^{\frac{t}{a}}\le -t+e^{\frac{t}{a}} \Leftrightarrow t\le 0 \quad (x(0)=1,\ y(0)=1)$$

とあわせて, グラフの概形は右図でもとめる

面積 S は右図斜線部



$$S=\triangle+\text{◺}$$

$$=\frac{1}{2}+\int_1^{2e}y(t)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}+\int_0^e y(t)\frac{dx}{dt}\,dt \quad \cdots ③$$

ここで

$$\sim\sim = \int_0^e\left(-t+e^{\frac{t}{e}}\right)\left(1+\frac{1}{e}e^{\frac{t}{e}}\right)dt$$

$$=\int_0^e\left\{\frac{1}{e}e^{\frac{2}{e}t}+\left(1-\frac{t}{e}\right)e^{\frac{1}{e}t}-t\right\}dt \quad \cdots ④$$

であり, 各項計算して,

$$\begin{cases} \int_0^e \frac{1}{e}e^{\frac{2}{e}t}dt=\frac{1}{2}\left[e^{\frac{2}{e}t}\right]_0^e=\frac{1}{2}(e^2-1) \\ \int_0^e\left(1-\frac{t}{e}\right)e^{\frac{t}{e}}dt=e\int_0^1(1-x)e^x dx=e^2-2e \\ \int_0^e t\,dt=\frac{1}{2}e^2 \end{cases}$$

だから, ④に代入して,

$$\sim\sim=\frac{1}{2}(e^2-1)+e^2-2e-\frac{1}{2}e^2$$

$$=e^2-2e-\frac{1}{2}$$

だから, ③から

$$S=e(e-2) \text{//}$$

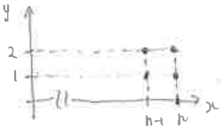
T.K. 87

第 5 問

[解] (1) $k+\ell$ 回の移動のうち,何回目に上へ移動するかをかんがえて

$$P(k,\ell)={}_{k+\ell}C_k\left(\frac{1}{2}\right)^{k+\ell}$$

(2) 右図から



$$P(n,2)=P(n,1)+\frac{1}{2}P(n-1,2) \quad \cdots ①$$

$$P(n,1)=P(n,0)+\frac{1}{2}P(n-1,1) \quad \cdots ②$$

ここで $P(n,0)=\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $P(n-1,2)={}_{n+1}C_2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, $P(n-1,1)={}_nC_1\left(\frac{1}{2}\right)^n$ (∵(1)) だから②①に代入して

$$P(n,1)=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$P(n,2)=\left(1+\frac{n}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{2}\cdot\frac{(n+1)\cdot n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$=\frac{n^2+5n+8}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$