1986

T. k. 数学 1986

ok

73分

第 1 問

[解] $a_n = 19^n + (-1)^{n-1} 2^{4n-3}$ の全てをわり切る数 b は

$a_1 = 21,\ a_2 = 329$ の両方をわり切ることが必要で. $b \in$ prime と

あわせて. $b=7$ が必要. 以下, 任意の a_n が7でわり切れることを示す.

法を7として

$$
\begin{aligned}
a_n &\equiv 5^n + 2(-16)^{n-1} \\
&\equiv (-2)^n - (-2)^n \\
&\equiv 0
\end{aligned}
$$

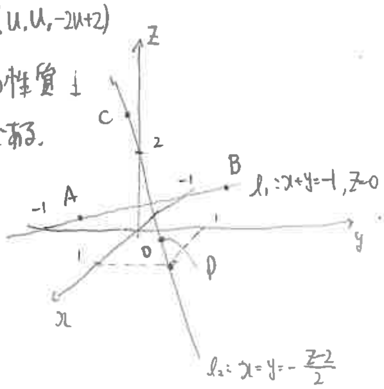
より示された。以上から $7_{\#}$

第 2 問

[解] (1) E$(t, -1-t, 0)$, F$(u, u, -2u+2)$

$(t, u \in \mathbb{R})$とおくと四面体の性質より

から、EFはl_1, l_2と垂直である。



$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} u-t \\ u+t+1 \\ -2u+2 \end{pmatrix}$ だから

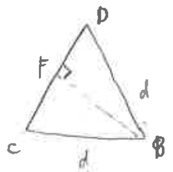
$$\begin{cases} \overrightarrow{EF} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ \overrightarrow{EF} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

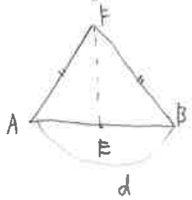
$$\begin{cases} (u-t)-(u+t+1)=0 \\ (u-t)+(u+t+1)+4(u-1)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t=-\frac{1}{2} \\ u=\frac{1}{2} \end{cases}$$

となり、E$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ // F$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$ //

(2) 1辺の長さdとすると右図から





$\overline{BF} = \frac{\sqrt{3}}{2}d$

だから、△FEBにピタゴラスを用いて

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}d\right)^2 = \overline{EF}^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$

$\overline{EF} = \frac{\sqrt{2}}{2}d \quad (\because d, \overline{EF} > 0)$

一方、(1)から$\overline{EF} = \sqrt{3}$だから、

$d = \sqrt{6}$ //

(3) A$(p, -1-p, 0)$とおくと

$\overline{AF} = \sqrt{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-p-\frac{3}{2}\right)^2 + 1}$

$= \sqrt{2p^2+2p+\frac{7}{2}}$

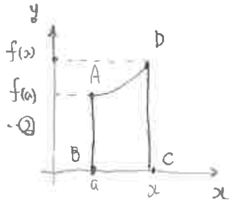
ここで、(2)から$\overline{AF} = \frac{\sqrt{3}}{2}d = \frac{3}{2}\sqrt{2}$だから、といて

$p = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3})$

題意から複号正に対応するのがAで、

A$\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ //

[解] $\begin{cases} f(x) > 0 \quad (0 \leqq x \leqq 1) \\ f(0) = 2,\ f(1) = 1 \end{cases}$ …①



又,題意及び①から $k \in \mathbb{R}_{>0}$ として,

$$(x-a)\{f(0)+f(x)\} = k\int_a^x f(t)\,dt \quad \cdots ②$$

が $0 \leqq a \leqq x \leqq 1$ なる任意の a, x で成立。

($a=x$ でも明らかに成立)。x で微分して.

$$f(a) + f(x) + xf'(x) - af'(x) = kf(x)$$

$y = f(x)$ とおく $a = x = 1$ として①から $k = 2$。次に $a = 0$ として

$$2 + y + x\frac{dy}{dx} = 2y$$

$y \neq 2,\ x \neq 0$ のとき

$$\frac{dy}{y-2} = \frac{dx}{x} \quad \cdots ③$$

積分して.

$$\log|y-2| = \log x + C_1 \quad \cdots ④$$

ただし,C_1 は定数。$x=1$ は①より,$x \neq 0$,$y \neq 2$ をみたすので,$x=1$ で

④が成立することから $C_1 = 0$,したがって

$$x = |y-2|.$$

したがって,$(x, y) = (1, 1)$ とあわせて

$$y = -x + 2$$

これは $x = 0$ でも成立する。

T. K. 1986

第 4 問

[解] $q=p(p^2-3)$ とおける。又.

$$f(x)=-(x-p)^2+p(p^2-3)$$

$$g(x)=x(x^2-3)$$

とおくと $f(x)=g(x)$ の異なる実解が2つである

$$g(x)-f(x)=x^3-3x+x^2-2px+p^2-p^3+3p$$

$$=(x-p)\underbrace{(x^2+(p+1)x+(p^2-p-3))}$$

〜〜部を $h(x)$ とおくとしたがって. $h(x)=0$ が $x\neq p$ にただ1つ実解を持つ

a $h(x)=0$ が $x\neq p$ に重解を持つ時

判別式を D として.

$$D=-3p^2+6p+13$$

だから. $D=0 \Leftrightarrow p=\dfrac{3\pm4\sqrt{3}}{3}$ の時 だがこれは $0<p<2$ に反し不適

b $h(x)=0$ が $x=p$ を解に持つ時

$h(p)=3(p^2-1)=0 \Leftrightarrow p=\pm1$ であり. $0<p<2$ から $p=1$ である. この時. $h(x)=0$ の解は $x=1,-3$ である

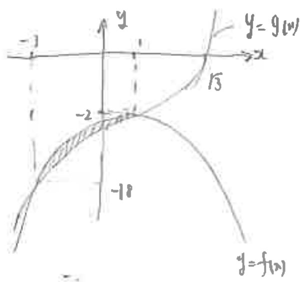
以上から $(p,q)=(1,-2)$ であり. グラフの概形は右図

もとめる面積 S として

$$S=\int_{-3}^{1}(g(x)-f(x))dx$$

$$=\int_{-3}^{1}(x-1)^2(x+3)dx$$

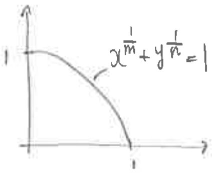
$$=\frac{1}{12}4^4=\frac{64}{3}$$ //



1986 T.K 前 回

第 5 問

[解] $A(m,n)=\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{m}})^n dx$ …①



(1) ①で $(m,n)=(m,1)$ として

$$A(m,1)=\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{m}})dx$$

$$=\left[x-\frac{1}{1+\frac{1}{m}}x^{\frac{1}{m}+1}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{m+1} \quad /\!/$$

(2)

$$\begin{cases} A(m,n+1)=\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{m}})^{n+1}dx \\ A(m+1,n)=\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{m+1}})^n dx \end{cases}$$

部分積分法から

$$A(m,n+1)=\left[x(1-x^{\frac{1}{m}})^{n+1}\right]_0^1+\int_0^1 (n+1)\cdot x(1-x^{\frac{1}{m}})^n\frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}dx$$

$$=\frac{n+1}{m}\int_0^1 x^{\frac{1}{m}}(1-x^{\frac{1}{m}})^n dx$$

$p=x^{\frac{m+1}{m}}$ とおくと $\frac{dp}{dx}=\frac{m+1}{m}x^{\frac{1}{m}}$, $x:0\to1$ で $p:0\to1$ だから

$$A(m,n+1)=\frac{n+1}{m}\int_0^1 \frac{m}{m+1}(1-p^{\frac{1}{m+1}})^n dp$$

$$=\frac{n+1}{m+1}\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{m+1}})^n dx = A(m+1,n) \text{ 図}$$

(3) (2)をくり返し用いて,(1)より

$$A(m,n)=\frac{n(n-1)\cdots2}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1)}A(m+n-1,1)$$

$$=\frac{n!\,m!}{(m+n-1)!}\cdot\frac{1}{m+n}=\frac{n!\,m!}{(m+n)!} \quad /\!/$$