T. K. 数学 1985

T. K. 1985

第1問

[解] $\begin{cases} \text{(i)}\ a^2-2b^2=\pm1 \\ \text{(ii)}\ a+\sqrt{2}b>0 \end{cases}$ …*

$p=1+\sqrt{2}$ とおく。$1-2\cdot1=-1$ から、$p\in G$ である。

(1) $1<g<p$ をみたす G の要素 g があると仮定すると

$$1<a+\sqrt{2}b<1+\sqrt{2} \quad \cdots ①$$

(ア) $a-\sqrt{2}b>0$ の時

(ii) から、$a^2-2b^2=(a+\sqrt{2}b)(a-\sqrt{2}b)>0$ だから (i) から、

$a^2-2b^2=1$ である。①から

$$a-\sqrt{2}b<1<(1+\sqrt{2})(a-\sqrt{2}b)$$

$$-1+\sqrt{2}<a-\sqrt{2}b<1 \quad \cdots ②$$

①②を辺々足して

$$\frac{\sqrt{2}}{2}<a<1+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$a\in\mathbb{Z}$ から $a=1$ で、①に代入して $0<\sqrt{2}b<\sqrt{2}$ となり、$b\in\mathbb{Z}$ に矛盾

(イ) $a-\sqrt{2}b<0$ の時

(ア)と同様に $a^2-2b^2=-1$ であって、①から

$$(1+\sqrt{2})(a-\sqrt{2}b)<-1<a-\sqrt{2}b$$

$$-1<a-\sqrt{2}b<1-\sqrt{2} \quad \cdots ③$$

①③を辺々足して

$$0<a<1$$

これは $a\in\mathbb{Z}$ に矛盾

以上から、$1<g<p$ をみたす $g\in G$ は存在せず、$u=p=1+\sqrt{2}$ である。

(2) 証明は帰納法による。$n=0$ の時は

$f(n)=gu^n$ とおくと $f(0)=g\in G$ だから成立するので、以下 $n=k$ ($\in\mathbb{Z}$) での $f(k)\in G$ を仮定し、$n=k\pm1$ での成立を示す。$f(k)=\alpha+\beta\sqrt{2}$ とおく。

$$f(k+1)=f(k)\cdot u=(\alpha+\sqrt{2}\cdot\beta)(1+\sqrt{2})=(\alpha+2\beta)+\sqrt{2}(\alpha+\beta)$$

であり、$f(k)\in G$ より (α,β) が * をみたすことから、

$$\begin{cases} f(k+1)>0,\ \alpha,\beta\in\mathbb{Z} \\ (\alpha+2\beta)^2-2(\alpha+\beta)^2=-\alpha^2+2\beta^2=\pm1 \end{cases}$$

となり、$f(k+1)\in G$。したがって、$n=k+1$ でも成立。

又、

$$\begin{aligned} f(k-1)&=(\alpha+\sqrt{2}\beta)(1+\sqrt{2})^{-1} \\ &=(\alpha+\sqrt{2}\beta)(-1+\sqrt{2}) \\ &=(-\alpha+2\beta)+\sqrt{2}(\alpha-\beta) \end{aligned}$$

より、$f(k-1)=f(k)(\sqrt{2}-1)>0$, $-\alpha+2\beta$, $\alpha-\beta\in\mathbb{Z}$,

$(-\alpha+2\beta)^2-2(\alpha-\beta)^2=-\alpha^2+2\beta^2=\pm1$ となって、$n=k-1$ でも成立

以上から、$n=k\pm1$ でも成立するから示された。

(3) G の要素 g があって、$g\neq u^n$ ($n\in\mathbb{Z}$) だと仮定する

[補題] $(1+\sqrt{2})^n=A_n+\sqrt{2}B_n$, $(1-\sqrt{2})^n=A_n-\sqrt{2}B_n$ ($A_n,B_n\in\mathbb{Z}$) と表されることを示す。

(証明) $n=0$ の時は明らか。まず $n\in\mathbb{N}$ の時、2項展開から

$$(1+\sqrt{2})^n=(1+{}_nC_2\cdot2+\cdots)+\sqrt{2}({}_nC_1+{}_nC_3+\cdots)$$

$$(1-\sqrt{2})^n=(1+{}_nC_2\cdot2+\cdots)-\sqrt{2}({}_nC_1+{}_nC_3+\cdots)$$

であり、${}_nC_k\in\mathbb{Z}$ だから [補題] は成立。$n\leq-1\in\mathbb{Z}$ の時、

$n=-p$ ($p\in\mathbb{N}$) とおきかえ、$(1+\sqrt{2})^{-1}=-1+\sqrt{2}$, $(1-\sqrt{2})^{-1}=-1-\sqrt{2}$ だから同様にして [補題] は成立。

以上から示された

したがって、$g\neq u^n$ ならば $a-b\sqrt{2}\neq(1-\sqrt{2})^n$ である。辺々かけて

$$a^2-2b^2\neq(1+\sqrt{2})^n(1-\sqrt{2})^n=(-1)^n$$

これが任意の $n\in\mathbb{Z}$ で成立するので、$a^2-2b^2\neq\pm1$ だが、これは $g\in G$ に矛盾。以上から $g=u^n$ とかけるから G の任意の要素は u^n の形でかける。

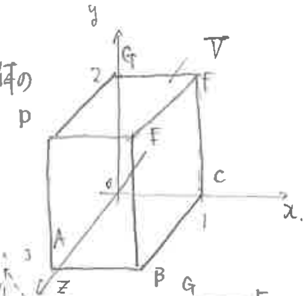
第 2 問

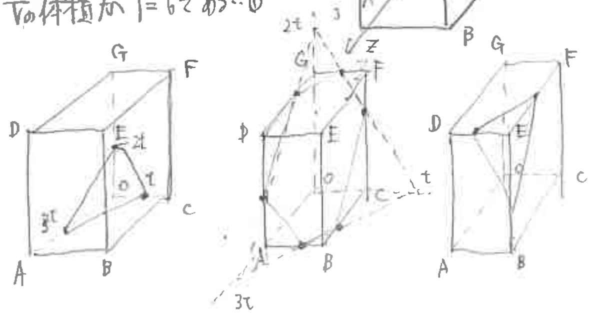
[解] (1)

tによって、切断面は変化する。直方体の頂点を右図のように定める。

$\pi(t)$: $x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z=t$ とおく。

Vの体積が $V=6$ である…①





1° $0<t\leq 1$　　2° $1\leq t\leq 2$　　3° $2\leq t<3$

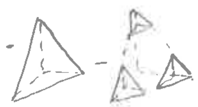
1°の時

切断立体のうち、三角錐のものの体積は $\frac{1}{3}\cdot 2t\cdot\left(\frac{1}{2}t\cdot 3t\right)=t^3$

であり、これは $\frac{V}{2}=3$ よりも小さいから、$f(t)=t^3$

2°の時

切断立体のうち、原点Oを含む方の体積は、

 $=t^3-3(t-1)^3=-2t^3+9t^2-9t+3=g(t)$

である。$g'(t)=-6(t^2-3t+2)=-6(t-2)(t-1)\geq 0$ だから $g(t)$は非減少で $g\left(\frac{3}{2}\right)=3$ だから、

$$f(t)=\begin{cases} g(t) & \left(1\leq t\leq \frac{3}{2}\right) \\ 6-g(t) & \left(\frac{3}{2}\leq t\leq 2\right) \end{cases}$$

3°の時

対称性から、$f(t)=(3-t)^3$

以上から

$$f(t)=\begin{cases} t^3 & (0\leq t\leq 1) \\ -2t^3+9t^2-9t+3 & \left(1\leq t\leq \frac{3}{2}\right) \\ 2t^3-9t^2+9t+3 & \left(\frac{3}{2}\leq t\leq 2\right) \\ (3-t)^3 & (2\leq t<3) \end{cases}$$

(2) $h(t)=t^3$, $p(t)=6-g(t)$ とおく。以下 $h>0$ とする。$f(t)$は全区間で連続である。

㋐ $t=1$の時

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\xrightarrow{h\to 0} g'(1)=3$$

$$\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}\xrightarrow{h\to 0} f'(1)=3$$

より左右極限が一致し、微分可能。

㋑ $t=\frac{3}{2}$の時

$$\frac{f\left(\frac{3}{2}+h\right)-f\left(\frac{3}{2}\right)}{h}\xrightarrow{h\to 0} p'\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{2}$$

$$\frac{f\left(\frac{3}{2}-h\right)-f\left(\frac{3}{2}\right)}{-h}\xrightarrow{h\to 0} p'\left(\frac{3}{2}\right)=+\frac{9}{2}$$

より左右極限が一致せず、微分不可能

以上から

$t=1$… possible

$t=\frac{3}{2}$… impossible　#

第 3 問

[解] 円O_k ($k=1,2,\cdots,5$)の半径をr_kとすると題意から

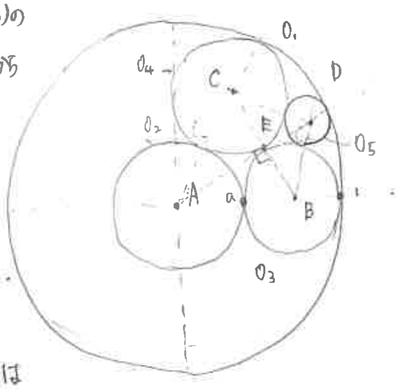
$r_1=1$

$r_2=a$

$r_3=r_4=\frac{1-a}{2}$

である。又、$\angle DAB=\theta$とおく。

$(0<\theta<\pi/2)$ …①.



O_3とO_4の接点Eとする。Eは

AD, BCの交点であることに注意する

(1) ピタゴラスの定理から

$$\begin{cases} AE=\sqrt{\left(a+\frac{1-a}{2}\right)^2-\left(\frac{1-a}{2}\right)^2}=\sqrt{a} \\ DE=\sqrt{\left(r_5+\frac{1-a}{2}\right)^2-\left(\frac{1-a}{2}\right)^2}=\sqrt{r_5^2+(1-a)r_5} \end{cases} \quad \cdots *$$

したがって、$r_1=1$を2通りで表して

$$\therefore 1=AE+DE+r_5$$
$$=\sqrt{a}+\sqrt{r_5^2+(1-a)r_5}+r_5$$

$$\therefore (1-\sqrt{a})-r_5=\sqrt{r_5^2+(1-a)r_5}$$

$$\therefore \begin{cases} r_5^2-2(1-\sqrt{a})r_5+(1-\sqrt{a})^2=r_5^2+(1-a)r_5 & \cdots ② \\ (1-\sqrt{a})-r_5\geqq 0 & \cdots ③ \end{cases}$$

②から
$$r_5=\frac{(1-\sqrt{a})^2}{2(1-\sqrt{a})+(1-a)}=\frac{(1-\sqrt{a})^2}{3-a-2\sqrt{a}}$$

である。$t=\sqrt{a}$ $(0<t<1$、④$)$とおいて③に代入

$$(1-t)+\frac{(1-t)^2}{t^2+2t-3}=(1-t)-\frac{1-t}{t+3}=\frac{(1-t)(t+2)}{t+3}>0 \quad (\because ④)$$

から、このr_5は③をみたして十分。この時、*から

$$DE=\sqrt{\frac{1-t}{t+3}\left(\frac{1-t}{t+3}+1-t^2\right)}=\sqrt{\frac{(1-t)^2}{(t+3)^2}(t+2)^2}$$
$$=\frac{(1-t)(t+2)}{t+3} \quad (\because ④)$$

$$AE=t$$

だから

$$S(a)=\triangle ABD+\triangle ACD$$
$$=AD\cdot BE=\left(t+\frac{(1-t)(t+2)}{t+3}\right)\cdot\frac{1-t^2}{2}$$

$$=\frac{(t+1)(1-t^2)}{t+3}=\frac{(\sqrt{a}+1)(1-a)}{\sqrt{a}+3} \quad //$$

(2) $f(t)=\frac{(t+1)(1-t^2)}{t+3}$とおく。$f(t)$の$0<t<1$での最大値を求めれば良い。

$p=t+3$とおくと $3<p<4$ で、

$$f(t)=\frac{(p-2)^2(4-p)}{p}$$

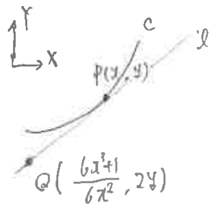
$$\frac{df}{dp}=\frac{p\left[2(p-2)(4-p)-(p-2)^2\right]-(p-2)^2(4-p)}{p^2}$$
$$=\frac{-2(p-2)(p^2-2p-4)}{p^2}$$

より、下表をとる。

p	3		$1+\sqrt{5}$		4
f'		+	0	−	
f		↗		↘	

したがって、$p=1+\sqrt{5}$ で 最大値 $10\sqrt{5}-22$ をとる。

第4問



[解] C上の点P(x, y)でのCの接線lが常にQ$\left(\frac{6x^3+1}{6x^2}, 2y\right)$を通る.

$$\frac{6x^3+1}{6x^2} - x = \frac{1}{6x^2} \neq 0$$

から, 直線PQはy軸平行でないので.

XY平面において.

$$l: Y = \frac{dy}{dx}(X - x) + y$$

と表せる. Qがl上にあるので.

$$2y = \frac{dy}{dx}\left(\frac{6x^3+1}{6x^2} - x\right) + y$$

$$y = \frac{1}{6x^2}\frac{dy}{dx}$$

$$6x^2\,dx = \frac{1}{y}\,dy$$

両辺積分して定数C_1として

$$2x^3 + C_1 = \log|y| \quad \cdots ①$$

Cは連続だから, $(x, y) = (0, 2)$でも①でよいので.

$$C_1 = \log 2$$

したがって.

$$|y| = 2\cdot e^{2x^3}$$

$$y = \pm 2\cdot e^{2x^3}$$

複号負はCが(0, 2)を通ることに反し不適だから.

$$y = 2e^{2x^3}$$ //

第 5 問

[解] 3人を a_1, a_2, a_3 とし a_1 の得点を確率変数 X とする。

A の場合

$X=k$ となる確率 $P(X=k)$ は、a_1 が k を引き a_2, a_3 が $k-1$ 以下の枚を引く場合。

$$\begin{cases} P(X=1)=0 \\ P(X=k)=\frac{1}{n^3}(k-1)^2 \quad (k=2 \cdots n) \end{cases}$$

他の場合の a_1 の得点は 0 だから

$$E = \sum_{k=2}^{n} \frac{k}{n^3}(k-1)^2$$
$$= \frac{1}{n^3}\sum_{k=2}^{n}\{k(k-1)(k-2)+k(k-1)\}$$
$$= \frac{1}{n^3}\sum_{k=2}^{n}\Big[\frac{1}{4}(k+1)k(k-1)(k-2)-\frac{1}{4}k(k-1)(k-2)(k-3)$$
$$+\frac{1}{3}(k+1)k(k-1)-\frac{1}{3}k(k-1)(k-2)\Big]$$
$$= \frac{1}{n^3}\Big[\frac{1}{4}(n+1)n(n-1)(n-2)+\frac{1}{3}(n+1)n(n-1)\Big]$$
$$= \frac{(n+1)(n-1)(3n-2)}{12n^2} \quad //$$

B の場合

a_1 の引いた数が Y_1 である時、a_1 が得点するのは、a_2, a_3 の引いた数 Y_2, Y_3 として、$Y_2, Y_3 \leq Y_1-1$ ① の時。したがって、この時の a_1 の得点の期待値 $E(Y_1)$ は、$Y_1=1$ の時 0、$Y_1 \geq 2$ のとき

$$E(Y_1) = \frac{1}{n^3}(\text{①をみたす全ての }(Y_2, Y_3)\text{ についての }Y_2+Y_3\text{ の和})$$

であるから

$$E(Y_1) = \frac{1}{n^3}2(Y_1-1)\{1+\cdots+(Y_1-1)\}$$
$$= \frac{1}{n^3}(Y_1-1)^2 Y_1$$

したがって、求める期待値 E' は

$$E' = \sum_{Y_1=2}^{n} E(Y_1) = \frac{1}{12n^2}(n+1)(n-1)(3n-2)$$

よっていずれの場合も

$$\frac{1}{12n^2}(n+1)(n-1)(3n-2) \quad //$$