東工大数学　1984

ok

第 1 問

[解] $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$ …①

(1) $c = a+b,\ d = a^2 - ab + b^2$, $d = (a-b)^2 + ab > 0$ (∵①) から

$$\begin{cases} c^2 - d = 3ab > 0 \\ 4d - c^2 = 3(a-b)^2 \geq 0 \end{cases} \cdots *$$

から $1 < \dfrac{c^2}{d} \leq 4$ 図

(2) $A = a^3 + b^3$ とおく. $A = p^n$ ($p \in$ prime, $n \in \mathbb{Z}$) となる条件をしらべる まず①から $A \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ なので $n \in \mathbb{N}$ として良い。さらに $A = cd$ から $c = p^\alpha,\ d = p^\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) とおける。(1)から

$$1 < p^{2\alpha - \beta} \leq 4 \quad \cdots ②$$

$p \in$ prime から ②がみたされる時

$$(p, 2\alpha - \beta) = \underset{⑦}{(2,2)}\ \underset{④}{(3,1)}$$

である

⑦の時

$$\begin{cases} a+b = 2^\alpha \\ a^2 - ab + b^2 = 2^{2\alpha - 2} \end{cases}$$

まず, *で等号が成立するので, $a = b$ である. 代入して

$$a = 2^{\alpha - 1}$$

①とあわせて. $(a,b) = (2^n, 2^n)$ ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$)

④の時

$$\begin{cases} a+b = 3^\alpha \\ a^2 - ab + b^2 = 3^{2\alpha - 1} \end{cases} \cdots ③$$

αを消す

$$3a^2 - 3ab + 3b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(2a - b)(a - 2b) = 0$$

対称性から. $b = 2a$ の時のみかんがえる. ③に代入

$$a = 3^{\alpha - 1}$$

したがって. $(a,b) = (3^n, 2\cdot 3^n)$ ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$). 対称性から $(a,b) = (2\cdot 3^n, 3^n)$ も解.

以上から

$$(a,b) = (2^n, 2^n)\ (2\cdot 3^n, 3^n)\ (3^n, 2\cdot 3^n)\ (n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$ //

第 2 問

[解] $n \in \mathbb{Z}, \geq 3$ …①, $x, y, z \in \mathbb{N}$ …②

$$\begin{cases} x+y+z=n \\ x \leq y+z \\ y \leq z+x \\ z \leq x+y \end{cases} \quad \cdots *_1$$

まず、$z=k$と固定する。$*$に代入して

$$\begin{cases} x+y=n-k \geq k \\ y \geq x-k \\ y \leq x+k \end{cases} \quad \cdots *_2$$

$y=n-k-x$を代入、$y>0$から $x<n-k$ …③

$$x-k \leq n-k-x \leq x+k$$

$$\frac{n}{2}-k \leq x \leq n/2 \quad \cdots ④$$

又、$1 \leq k \leq \frac{n}{2}$である。同区間では $\frac{n}{2} \leq n-k$である…⑤

㋐ $n=2p$ ($p \in \mathbb{N}$)の時 ($p=2, 3, \cdots$)

$z=k$と固定 ($k=1, 2, \cdots p$) した時の (x, y)の数は ③～⑤より

$$\begin{cases} k=1, 2, \cdots, p-1 \text{の時} & k+1 \text{コ} \\ k=p \text{の時}, & p-1 \text{コ} \end{cases}$$

より、あわせて $\frac{1}{2}p(p+1)+p-2$ コ $=\frac{1}{2}p^2+\frac{3}{2}p-2=\frac{1}{8}n^2+\frac{3}{4}n-2$

㋑ $n=2p+1$ の時

$z=k$と固定 ($k=1, 2 \cdots p$) した時の (x, y)の数は ③～⑤より

kコで

$$\sum_{k=1}^{p} k = \frac{1}{2}p(p+1) \text{コ}$$

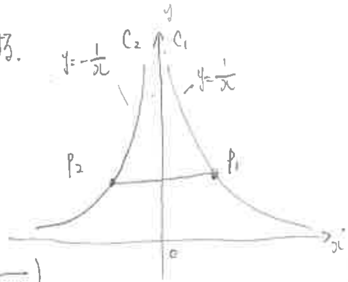
したがって

$$\begin{cases} \frac{1}{8}n^2+\frac{3}{4}n-2 \text{コ} & (n \in \text{even}) \\ \frac{1}{2}\frac{n-1}{2}\frac{n+1}{2} \text{コ} & (n \in \text{odd}) \end{cases}$$

//

第 3 問

[解] $P_1(t_1, \frac{1}{t_1})$, $P_2(t_2, \frac{-1}{t_2})$とする。



(1) 対称性から、P_1でlとC_1が接する場合を考える。この時、

$$l: y=-\frac{1}{t_1^2}x+\frac{2}{t_1}$$

であるから、$C_2\left((1-\sqrt{2})t_1, \frac{1}{(1+\sqrt{2})t_1}\right)$

となり、

$$\triangle OP_1P_2 = \frac{1}{2}\left|(1-\sqrt{2})t_1\cdot\frac{1}{t_1} - \frac{1}{(\sqrt{2}-1)t_1}\cdot t_1\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|(1-\sqrt{2})-(\sqrt{2}+1)\right| = \sqrt{2} = \text{const}$$ 図

(2) 一般の場合 $p=t_1/t_2$ とおくと

$$\triangle OP_1P_2 = \frac{1}{2}\left|\frac{t_1}{t_2}+\frac{t_2}{t_1}\right| = \frac{1}{2}\left|p+1/p\right| = \frac{-1}{2}(p+1/p)$$

$t_1>0$, $t_2<0$ より、pは$p<0$なる任意の実数をとる。

$$\triangle OP_1P_2=\sqrt{2} \Leftrightarrow p^2+2\sqrt{2}p+1=0$$

$$\therefore p = -\sqrt{2}\pm 1$$

1° $p=-\sqrt{2}+1$ の時

$t_1=(1-\sqrt{2})t_2$ となるが、この時、

$$l: y=\frac{1}{t_2^2}x-\frac{2}{t_2}$$

となり、lはC_2の接線

2° $p=-\sqrt{2}-1$ の時

$t_1=-(1+\sqrt{2})t_2$ となるが、この時

$$l: y=-\frac{x}{t_1^2}+\frac{2}{t_1}$$

となり、lはC_1の接線

以上から示された 図

第 4 問

[解] $F=\int_0^1 e^x|x-a|dx$ とおく

⑦ $a\leq 0$ の時

$$F=-a\int_0^1 e^x dx+\int_0^1 xe^x dx$$

$$\frac{dF}{da}=-\int_0^1 e^x dx<0$$

より. F は a の単調減少関数

④ $a\geq 1$ の時

⑦と同じく. F は a の単調増加関数

従って. $0\leq a\leq 1$ の時 F は最小値をとる. $f(x)=e^x(x-a)$ とおく.

$$F=-\int_0^a f(x)dx+\int_a^1 f(x)dx$$

$g(x)=e^x(x-a-1)$ とおくと $g'(x)=f(x)$ であって.

$$F=g(1)+g(0)-2g(a)$$

$$=-ea-a-1+2e^a$$

$$\frac{dF}{da}=-e-1+2e^a$$

より、下表を得る

a	0		$\log\frac{e+1}{2}$		1
F'		$-$	0	$+$	
F		↘		↗	

したがって $a=\log\frac{e+1}{2}$ で min F をとる.

$-//-$

第 5 問

[解] $S=\sin x$ $C=\cos x$ と書く

$\tan x = \cos x$

$\therefore S = \frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{5})$

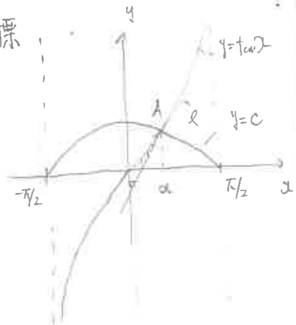
$|S|\leq 1$ から $S = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \equiv S_0$ である。…①

グラフは右図で、交点 A の x 座標

α とおく、$(\tan x)' = \frac{1}{C^2}$ だから、

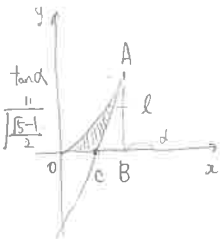
①とあわせて、l のカタムキは

$$\frac{1}{1-S_0^2} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$



であって、A から x 軸に下ろした垂足 B, l と x 軸の交点 C とすると、もとめる面積 T として

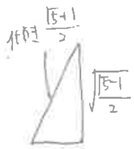
$$T = \int_0^\alpha \tan x\,dx - \triangle ABC \quad \cdots ⓪$$



まず、

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} = \frac{1}{2}\,\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4} \quad ②$$



さらに

$$\int_0^\alpha \tan x\,dx = \Big[-\log(\cos x)\Big]_0^\alpha$$

$$= -\log(\cos\alpha) = -\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \cdots ③$$

⓪.②.③から

$$T = -\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{1}{8}(\sqrt{5}-1)^2$$

//