T.K.大数学1983

ok

東工大　　1983

第 1 問

[解] (1) $x=\dfrac{ac}{ab}$, $y=\dfrac{bd}{ab}$ とおける。ただし、

$a,b,c,d\in\mathbb{N}$, b と c, a と d は互いに素。又、対称性から $x>y$ とする。…①

$$\begin{cases}\dfrac{1}{|x-y|}=\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{ab}{ac-bd} \quad (\because ①)\\ f(x)+f(y)=b^2+a^2\end{cases}$$

から

$$f(x)+f(y)-\frac{2}{|x-y|}=a^2+b^2-\frac{2ab}{ac-bd}$$

$$=(a-b)^2+2ab\left(1-\frac{1}{ac-bd}\right)\geq 0$$

となり示された。■

$\left(ac-bd\in\mathbb{N}\text{ から、}\dfrac{1}{ac-bd}\leq 1\right)$

(2) $x_n=\dfrac{2}{3n+4}$ とおく。$k\in\mathbb{N}$ とする

$$\begin{cases}n=2k\text{ の時、}x_n=\dfrac{1}{3k+2}\\ n=2k-1\text{。}\quad x_n=\dfrac{2}{6k+1}\end{cases}$$

であるから $F_n=\{f(x_n)+f(x_{n+1})\}|x_n-x_{n+1}|$ とおくと $n\to\infty$ で $k\to\infty$ で、

$$F_{2k}=\left|\frac{1}{3k+2}-\frac{2}{6k+7}\right|\{(3k+2)^2+(6k+7)^2\}$$

$$=\frac{3\{(3k+2)^2+(6k+7)^2\}}{(3k+2)(6k+7)}$$

$$=\frac{3\{(3+2/k)^2+(6+7/k)^2\}}{(3+2/k)(6+7/k)}\longrightarrow\frac{3\cdot 45}{18}=\frac{15}{2}\ (k\to\infty)$$

$$F_{2k-1}=\left|\frac{2}{6k+1}-\frac{1}{3k+2}\right|\{(3k+2)^2+(6k+1)^2\}$$

$$=\frac{3[(3+2/k)^2+(6+1/k)^2]}{(6+1/k)(3+2/k)}\longrightarrow\frac{15}{2}\ (k\to\infty)$$

以上から

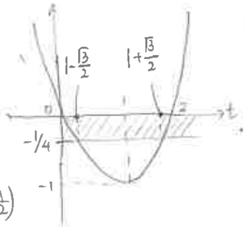
(与式) $=\dfrac{15}{2}$ //

第 2 問

[解] $0<t\leq\frac{1}{2}\cdots①$, $y=f(t)=\frac{1}{2}\left\{t+\frac{x(2-x)}{t}\right\}$とおく.

$$f'(t)=\frac{1}{2}\left\{1+\frac{x(x-2)}{t^2}\right\}$$

であり, 以下のようになる.



1° $x\leq0,\ 2\leq x$の時

$f'(t)>0$から $\lim_{t\to+0}f(0)<y\leq f(\frac{1}{2})$

2° $0<x<1-\frac{\sqrt{3}}{2},\ 1+\frac{\sqrt{3}}{2}<x<2$の時

下表を得る

t	0		$\sqrt{x(2-x)}$		$1/2$
f'		$-$	0	$+$	
f		↘		↗	

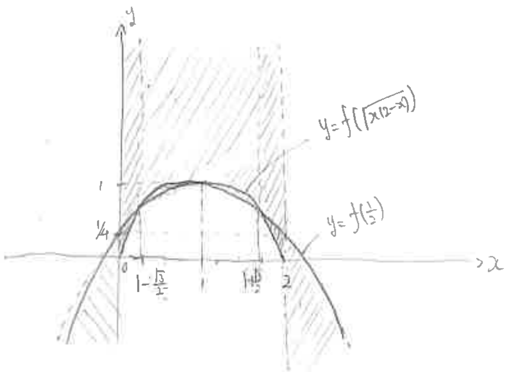
したがって, $\lim_{t\to+0}f(t)>f(1/2)$から

$$f(\sqrt{x(2-x)})\leq f(t)<\lim_{t\to+0}f(t)$$

3° $1-\frac{\sqrt{3}}{2}\leq x\leq 1+\frac{\sqrt{3}}{2}$の時

$f'(t)<0$から $f(\frac{1}{2})\leq y<\lim_{t\to+0}f(t)$

図示して, 下図斜線部 (境界は $x=0,2$を除く)



$f(\frac{1}{2})=-x^2+2x+\frac{1}{4}=-(x-1)^2+\frac{5}{4}$

$f(\sqrt{x(2-x)})=\sqrt{x(2-x)}$

第 3 問

第 4 問

[解]　$A+B+C=\pi$; $A, B, C>0$ …①

$F=\sin 3A+\sin 3B+\sin 3(\pi-A-B)$　(∵①)

$=\sin 3A+\sin 3B+\sin 3(A+B)$

対称性から $A=B$として良い。$0<A<\frac{\pi}{2}$ …② であり

∴ $F=2\sin 3A+\sin 6A$

$\frac{dF}{dA}=6\cos 3A+6\cos 6A$　…③

$t=\cos 3A$とおくと、

$\frac{③}{6}=2t^2+t-1=(t+1)(2t-1)$

下表をうる

A	0		20°		$\frac{\pi}{2}$
t	1		1/2		0
F'		+	0	−	
F		↗		↘	

$A=30°$の時, $\max F=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

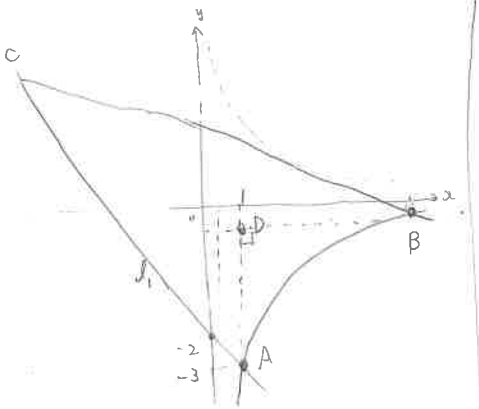
$A\to 0$ の時, $F\to 0$

$A\to\frac{\pi}{2}$ 〃　$F\to -2$

以上から
(1) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　(2) $-2<F\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}$ —A

第５問

[解]

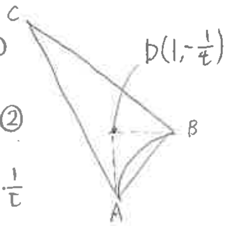


$$\begin{cases} l_1 : y=-x-2 \\ l_2 : y=-\frac{1}{t^2}x+\frac{2}{t} \end{cases}$$

l_1と$y=-\frac{3}{x}$の交点の1つ$A(1,-3)$, l_2と$y=-\frac{3}{x}$の交点の1つ

$B\left(3t,-\frac{1}{t}\right)$, l_1とl_2の交点$C\left(-\frac{2t}{t-1},\frac{2}{t-1}\right)$とおく．

$S(t)$は右のように分割できる。



$S(t)=\triangle ABC-$ ◸AB $\cdots$①

$\triangle ADB=\frac{1}{2}(3t-1)\left(-\frac{1}{t}+3\right)$ $\cdots$②

◸$ABD=\int_1^{3t}\frac{3}{x}dx-(3t-1)\cdot\frac{1}{t}$

$=3\log 3t-(3t-1)\frac{1}{t}$ $\cdots$③

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\left|(3t-1)\left(\frac{2}{t-1}+3\right)-\left(-\frac{1}{t}+3\right)\left(-\frac{2t}{t-1}-1\right)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|(3t-1)\frac{3t-1}{t-1}+\frac{3t-1}{t}\frac{3t-1}{t-1}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(3t-1)^2}{t-1}\frac{t+1}{t} \quad \cdots ④$$

まず,②,③から.

$$◸AB=\frac{1}{2}\frac{1}{t}(3t-1)^2-3\log 3t+\frac{1}{t}(3t-1) \quad \cdots ⑤$$

④,⑤を①に代入

$$S(t)=\frac{1}{2}\frac{t+1}{t}\frac{(3t-1)^2}{t-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{t}(3t-1)^2-\frac{1}{t}(3t-1)+3\log 3t$$

$$=\frac{1}{2}\frac{3t-1}{t}\left[\frac{t+1}{t-1}(3t-1)-(3t-1)-2\right]+3\log 3t$$

$$=\frac{1}{2}\frac{3t-1}{t}\frac{4t}{t-1}+3\log 3t$$

$=2(3t-1)$ [illegible] $=2\left(3+\frac{2}{[illegible]}\right)+3\log 3t$

$$S'(t)=\frac{3}{t}-\frac{4}{(t-1)^2}=\frac{(3t-1)(t-3)}{t(t-1)^2}$$

より,下表を得る

t	1		3	
S'		$-$	0	$+$
S		↘		↗

したがって

$$\min S(t)=S(3)=8+6\log 3 \quad //$$