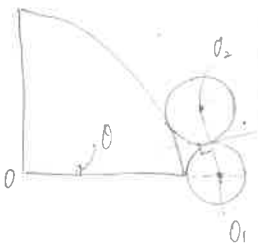
東工大数学　　1982

ok

第 1 問

[解] 図のように θ をおく。又、a_n コの円の中心を $O_1 \sim O_n$ とする。半径1の円の中心 O として、図から

$$\sin\theta = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n+1} \quad \cdots ①$$



又、題意から

$$2a_n\theta \leq 2\pi < 2(a_n+1)\theta$$

$$\frac{\pi}{n\theta} - \frac{1}{n} \leq \frac{a_n}{n} < \frac{\pi}{n\theta} \quad \cdots ② \quad (\because n>0)$$

ここで図から $n \to \infty$ の時 $\theta \to 0$ で これと①から

$$\frac{1}{n\theta} = \frac{1}{n\sin\theta} \cdot \frac{\sin\theta}{\theta}$$

$$= \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\sin\theta}{\theta}$$

$$= \frac{1+1/n}{1} \cdot \frac{\sin\theta}{\theta} \to 1 \quad (n \to \infty)$$

だから②とはさみうちから

$$\frac{a_n}{n} \to \pi \quad /\!/$$

第 2 問

[解] $\vec{a}, \vec{b}$ のなす角 θ とおく。この時対称性から、$0<\theta\leqq\pi/2$ …①

で考えれば良い。この時、$\cos\theta\geqq 0$ から

$$|\vec{a}\pm\vec{b}|=\sqrt{2\pm 2\cos\theta} \quad \cdots *$$

より $|\vec{a}+\vec{b}|>|\vec{a}-\vec{b}|$ となることに注意する。

(1) 対称性から $m\geqq 0$ で示せば良い。$m=0$ なら明らかに $\min L=1$ だから以下 $m>0$ とする。

$$|\vec{L}|^2=m^2+n^2+2mn\cos\theta \quad \cdots ①$$

であり、これは m, n について単調増加だから $n\geqq 0$ の時は $(m,n)=(0,1)$ の時 $\min L=1$,

$n\doteqdot 0$ の時は $(m,n)=(1,0)$ の時 $\min L=1$ である（0ベクトルをのぞいた） …②

次に $n<0$ の時、$n'=-n$ とおくと、$n'>0$ となり ①から

$$\begin{aligned}|\vec{L}|^2&=m^2+n'^2-2mn'\cos\theta\\&=(m-n')^2+2mn'(1-\cos\theta)\\&\geqq 2(1-\cos\theta) \qquad (\text{等号成立は } m=n'=1,\ \because m>0, n'>0)\\&=|\vec{a}-\vec{b}|^2\end{aligned}$$

だから たしかに $(m,n)=(1,-1)$ で $\min L=|\vec{a}-\vec{b}|$ をとる。 …③

②③から $0<\theta\leqq\pi/2$ の時 $L=1$ or $|\vec{a}-\vec{b}|$ である。$\frac{\pi}{2}\leqq\theta<\pi$ の時は対称性から

$L=1$ or $|\vec{a}+\vec{b}|$ となる。以上から示された 図

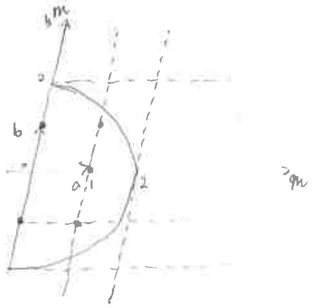
(2) 引き続き①のもとでかんがえる。$*$から、条件は

$$|\vec{a}-\vec{b}|\geqq 1 \Leftrightarrow 2-2\cos\theta\geqq 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2} \quad ④$$

だから $S=\frac{1}{2}\sin\theta$ の $\min$ は $\theta=\frac{\pi}{3}$ の時の $\frac{\sqrt{3}}{4}$ である。

[解2] $m\geqq 0$, $0<\theta\leqq\pi/2$ とする。

斜行座標を考える。図のように半径2の円を描くと $(m,n)=(1,\pm1)(1,0)(0,\pm1)$ のみが円の内部にあるから、最小値の候補はこれらだけである。よって示された 図



[解] $C: y=f(x)=x^4-6x^2$ とおく。$f'(x)=4x^3-12x$ より $x=t$ における

Cの接線lは $l: y=(4t^3-12t)x-3t^4+6t^2$ より、これがPを

通る時

$$\beta=(4t^3-12t)\alpha-3t^4+6t^2 \quad \cdots ①$$

Cの2重接線は $y=-9$ だけであるから、①が $t\neq0$ に4異実解を

持てば良い。そこで、$g(t)=3t^4-4\alpha t^3-6t^2+12\alpha t+\beta$ とおく。

$$g'(t)=12t^3-12\alpha t^2-12t+12\alpha$$

$$=12(t-\alpha)(t+1)(t-1)$$

より、α によって下表を得る。まず、$t=0$ が解でないので $\beta\neq0$

t		α		-1		1	
g'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
g	↘		↗		↘		↗

$1°\ \alpha\leq-1$

条件は $g(\alpha), g(1)<0,\ g(-1)>0$

t		-1		α		1	
g'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
g	↘		↗		↘		↗

$2°\ -1\leq\alpha\leq1$

$g(-1)<0,\ g(1)<0,\ g(\alpha)>0$

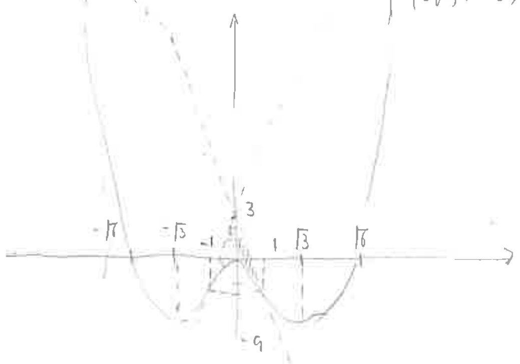
t		-1		1		α	
g'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
g	↘		↗		↘		↗

$3°\ 1\leq\alpha$

$g(-1)<0,\ g(\alpha)<0,\ g(1)>0$

$g(1)=\beta+8\alpha-3,\ g(-1)=\beta-8\alpha-3,\ g(\alpha)=-\alpha^4+6\alpha^2+\beta$ から図示して下図

(境界含まず)

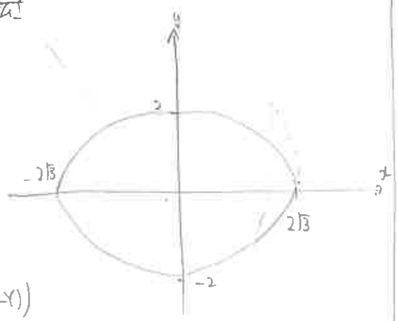


$(\because \beta>\alpha^4-6\alpha^2)$

[解] もとの楕円を θ だけ回転させた図形上の点 (X, Y) とすると

$$x+yi=(X+Yi)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)+\frac{\sqrt{2}}{2}i(-X+Y)$$



から

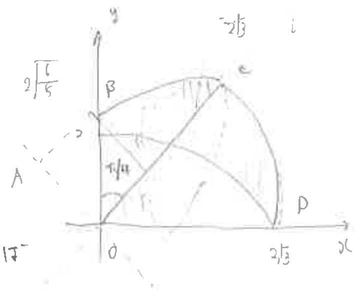
$$(x, y)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y), \frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)\right)$$

とすれば、

$$\frac{(X+Y)^2}{12}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{(X-Y)^2}{4}\leq 1$$

である。したがって斜線の部分の概形は

右図



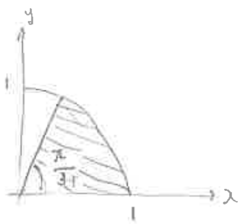
扇型OCD $=\frac{1}{2}\frac{\pi}{4}\cdot(2\sqrt{3})^2$

$=\frac{3}{2}\pi$ …①

又、⌓OBCについて、

$X=\frac{x}{2\sqrt{3}}, Y=\frac{y}{2}$ なる変換をすれば

右図斜線部の領域になるので、



⌓OBC $=\frac{1\cdot\pi}{2\cdot 3}\times 2\sqrt{3}\cdot 2$

$=\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi$ …②

①②から、もとめる面積Sとして

$S=\frac{3}{2}\pi+\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi$

$=\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)\pi$ //

第 5 問

[解] 9つの数の平均の小数第1位が1になるのは、9つの数の和Aが

1, 10の時 $(0 \leqq A \leqq 18)$

A=1の時

1回だけ1, 他が0の時で、 $9\left(\frac{1}{3}\right)^9 = \left(\frac{1}{3}\right)^7$

A=10の時

回数＼数	2	1	0
	5	0	4
	4	2	3
	3	4	2
	2	6	1
	1	8	0

上図から、

$$\frac{{}_9C_4 + {}_9C_2\,{}_7C_3 + {}_9C_2 \cdot {}_7C_3 + {}_9C_1\,{}_8C_2 + {}_9C_1}{3^9}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^9 (9 \cdot 14 + 40 \cdot 9 \cdot 7 + 9 \cdot 28 + 9)$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^7 \cdot 323$$

以上から

$$\left(\frac{1}{3}\right)^7 \cdot 324 = \frac{4}{3^3} = \frac{4}{27}$$ ＃