T. K. 大数学 1981

第 1 問

[解] $2^{n-1}\cdot\alpha = a_n + b_n$ の両辺に2をかけて.

$$2^n\cdot\alpha = 2a_n + 2b_n = a_{n+1} + b_{n+1} \quad \cdots ①$$

である。nの偶奇で場合分けして、$k\in\mathbb{N}$に対し、

1° $n=2k$の時、$1<2b_n<2$だから、

$$\begin{cases} a_{2k+1} = 2a_{2k}+1 \\ b_{2k+1} = 2b_{2k}-1 \end{cases} \quad \cdots ②$$

2° $n=2k-1$の時、$0\leq 2b_n<1$だから。

$$\begin{cases} a_{2k} = 2a_{2k-1} \\ b_{2k} = 2b_{2k-1} \end{cases} \quad \cdots ③$$

となる。②.③から

$$b_{2k+1} = 4b_{2k-1} - 1$$

$$\therefore\ b_{2k+1} - \frac{1}{3} = 4\left(b_{2k-1} - \frac{1}{3}\right)$$

$b_1=\alpha$ だから、くり返し用いて.

$$\begin{cases} b_{2k-1} = 4^{k-1}(\alpha - 1/3) + \frac{1}{3} \\ b_{2k} = 2\cdot 4^{k-1}(\alpha - 1/3) + \frac{2}{3} \end{cases}$$

$0\leq b_k<1$が任意のkで成立するので: $\alpha = 1/3$が必要で、逆にこの時.

$$b_{2k-1} = \frac{1}{3},\ b_{2k} = \frac{2}{2}$$

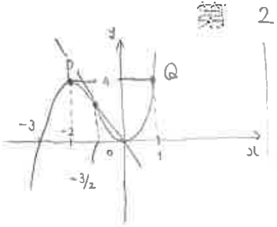
で: 条件をみたし十分。よって $\alpha = 1/3$ // である。この時、b_nと同様にa_nをもとめて. ($a_1=0$より)

$$\begin{cases} a_{2k-1} = 4^{k-1}(0+1/3) - 1/3 \\ \qquad\quad = \frac{1}{3}(4^{k-1}-1) \\ a_{2k} = \frac{2}{3}(4^{k-1}-1) \end{cases}$$

//

第 2 問

[解] $f(x)=x^3+3x^2$とする。グラフの概形は右図



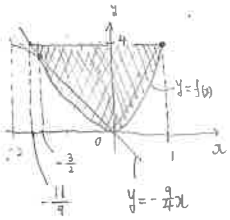
$f'(x)=3x^2+6x$から、$x=t$での接線は

$$y=(3t^2+6t)x-2t^3-3t^2$$

となる。これがOを通る時

$$2t^3+3t^2=0 \iff t=0,-\frac{3}{2}$$

であることに注意すると、線分OTがDに含まれるような点Tの領域は右図斜線部(境界含む)である。辺OR, OSがこの領域内にあることが必要で、逆にこの時△ORSはDに含まれる。よってR, Sは右図斜線部内をうごく。



さて、△ORSのmaxを与えるR, Sの候補を考えよう。まず、Sを固定し、Rを$y=kx$ $(k\geq 0)$上で固定し、この上で動かす。ORを底辺とみれば、△ORSがmaxになるのはORが最大、つまりRがこの領域Eの境界上をうごく時である。

同様に考えれば、SもEの境界上の時△ORSはmaxとなる。そこでまずmaxを与えるRをもとめる。Sを境界上で動かし、OS: $y=kx$ $(k\leq 0)$とする。この時OSとRのキョリlは$R(x_1, y_1)$として

$$l=\frac{|kx_1+y_1|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{-kx_1+y_1}{\sqrt{k^2+1}} \quad (\because x_1, y_1>0, -k>0)$$

これはx_1, y_1について単調増加だから、max△ORSを与えるRの1つに$R(1, 4)$がある。この時SとORのキョリをmaxにするSをもとめれば良い。$S(x_2, y_2)$として、このキョリl_2とすると、OR: $y=4x$だから

$$l_2=\frac{|4x_2-y_2|}{\sqrt{17}}=\frac{-4x_2+y_2}{\sqrt{17}} \qquad (\because x_2<0, y_2>0)$$

となり同様に、これをmaxにするSは$S\left(-\frac{16}{9}, 4\right)$である。

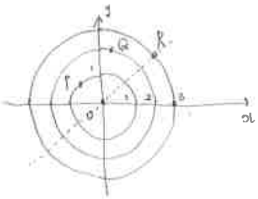
以上から、$S\left(-\frac{16}{9}, 4\right)$, $R(1, 4)$の時、△ORSはmaxで

$$\frac{1}{2}\left|1\cdot 4+\frac{16}{9}\cdot 4\right|=\frac{50}{9} \text{//}$$

となる。

第 3 問

[解] P,Qが線分OR上にある時を.時刻の基準としてt=0とする。又この時のRの座標が(3,0)となるようにして考える。



すると時刻tでの各々の座標は

$P(\cos t, \sin t)$

$Q(2\cos 2t, 2\sin 2t)$

$R(3\cos 3t, 3\sin 3t)$

とかける。以下 $S=\sin t$, $C=\cos t$ とする。

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2\cos 2t - C \\ 2\sin 2t - S \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 3\cos 3t - C \\ 3\sin 3t - S \end{pmatrix}$$

だからサラスの公式より.時刻tでの△PQRの面積T(t)として

$$2T(t) = \left|(3\sin 3t - S)(2\cos 2t - C) - (3\cos 3t - C)(2\sin 2t - S)\right|$$

$$= \left| 6\sin 3t\cos 2t - 2S\cos 2t - 3C\sin 3t + SC - (6\sin 2t\cos 3t - 3S\cos 3t - 2C\sin 2t + SC)\right|$$

$$= \left| 6(\sin 3t\cos 2t - \sin 2t\cos 3t) - 3(C\sin 3t - S\cos 3t) - 2(S\cos 2t - C\sin 2t)\right|$$

$$= \left| 6\sin t - 3\sin 2t - 2\sin(-t)\right|$$

$$= \left| 6S - 3\sin 2t + 2S\right|$$

$$= \left| 8S - 6SC\right| = |S|\,|8 - 6C| \quad \cdots ①$$

| |の中身を $f(t)$ とすると.

$$f'(t) = 8C - 6\cos 2t = 8C - 6(2C^2 - 1) = 2(-6C^2 + 4C + 3)$$

から.下表を得る。(|S|,Cの周期性から. $0 \leq t \leq \pi$ で考えれば良い) ただし. $\alpha = \frac{2-\sqrt{22}}{6}$ である。

t	0				π
C	1		α		-1
f'		+	0	−	−
f	0	↗		↘	0

ここで $C=\alpha$ の時

$$|S| = \sqrt{1-\alpha^2} = \frac{1}{6}\sqrt{10+4\sqrt{22}}$$

だから. ①に代入して

$$\max T(t) = \frac{\sqrt{10+4\sqrt{22}}}{6} \cdot \left|4 - 3\cdot\frac{2-\sqrt{22}}{6}\right|$$

$$= \frac{(6+\sqrt{22})\sqrt{10+4\sqrt{22}}}{12} \quad \left(= \frac{\sqrt{409+88\sqrt{22}}}{6} \right)$$

//

3

2

36+22

[解]

(1) $t\to 0$の時を考えるので、$|\cos 2x| = \cos 2x$として考えて良い。この時、平均値の定理から、

$$F(t) = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}t} \cos 2x\,dx}{t} = \frac{\pi}{2}\cos 2p \quad \left(0<p<\frac{\pi}{2}t\right)$$

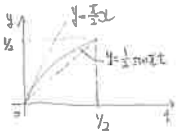
をみたすpがある。はさみうちから$t\to 0$の時$p\to 0$で、$\cos 2x$は連続だから、

$$F(t) \longrightarrow \frac{\pi}{2}\cos 2\cdot 0 = \frac{\pi}{2} \quad (t\to 0)$$

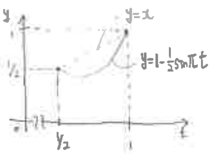
(2)
$$F(t) = \begin{cases} \frac{1}{t}\int_0^{\frac{\pi}{2}t} \cos 2x\,dx & \left(0<t\le\frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{t}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}t} \cos 2x\,dx\right\} & \left(\frac{1}{2}\le t\le 1\right) \end{cases}$$

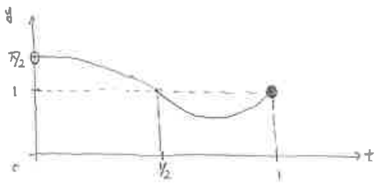
$$= \begin{cases} \frac{1}{2t}\sin\pi t & \left(0<t\le\frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{2t}(2-\sin\pi t) & \left(\frac{1}{2}\le t\le 1\right) \end{cases}$$

したがって、前者は$(0,0)$と$\left(t, \frac{1}{2}\sin\pi t\right)$を結ぶ直線の傾き、後者は$(0,0)$と$\left(t, 1-\frac{1}{2}\sin\pi t\right)$を結ぶ直線の傾きを表すことから、右図とあわせて、$y=F(t)$のグラフの概形は下図



$\left(y''=-\frac{\pi^2}{2}\sin\pi t\le 0\right)$





したがって、$F(t)\ge 1$となるtの範囲は、

$0<t\le\frac{1}{2},\ t=1$ //

[解2]

(2) $g(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}t} |\cos 2x|\,dx$のグラフは、$\left(\frac{1}{2}, g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$を軸に対称な

である。$0<t\le 1/2$の時、

$g(t) = \frac{1}{2}\sin\pi t$

であって、$y=g(t)$のグラフは右下のようになる。$F(t)$は$(0,0)$と

$(t, g(t))$のカタムキだから、

$0<t\le\frac{1}{2}$ or $t=1$ //