T. K. 大数学 1980

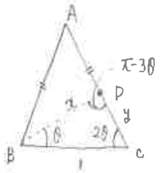
第1問

[解]

第 2 問

[解] $|BD| = x$ とする。$\angle CBD = \theta$ とする。この時題意から $\angle ACB = 2\theta$ である。$|CD| = y$ とする。まず $\triangle ABC$ の成立条件から

$$0 < 2\theta < \pi/2 \quad \therefore\ 0 < \theta < \pi/4 \qquad \cdots ①$$



$\triangle BCD$ に正弦定理を用いて

$$\frac{x}{\sin 2\theta} = \frac{1}{\sin(\pi-3\theta)} = \frac{1}{\sin 3\theta} \qquad \therefore\ x = \frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta} \qquad \cdots ②$$

以下 $S = \sin\theta$, $C = \cos\theta$ とする。$\sin 2\theta = 2SC$, $\sin 3\theta = 3S - 4S^3$ より, ② から

$$x = \frac{2SC}{3S-4S^3} = \frac{2C}{3-4S^2} = \frac{2C}{4C^2-1}$$

これは C の単調減少カンスウであり, ① とあわせて,

$$\frac{2}{3} < x < \sqrt{2} \quad \left(\because\ \frac{2C}{4C^2-1} \xrightarrow{C \to \frac{\sqrt{2}}{2}+0} \sqrt{2},\ \frac{2C}{4C^2-1} \xrightarrow{C \to 1-0} \frac{2}{3}\right)$$

第 3 問

[解] (t, e^t)における接線l_tは、$(e^x)'=e^x$より、

$$l_t: y=e^t(x-t)+e^t \quad \cdots ①$$

である。これが(a, b)を通る時、

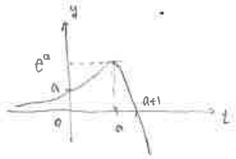
$$b=e^t(a-t)+e^t=f(t) \quad \cdots ②$$

$y=e^x$では接点が異なれば接線が異なるので、②をみたすtの数が(a, b)から引きうる接線の数に等しい。

$$f'(t)=e^t(a+1-t-1)=e^t(a-t)$$

から、下表をうる。

t		a	
f'	$+$	0	$-$
f	↗	e^a	↘



したがって、$f(t) \longrightarrow -\infty \ (t\to+\infty)$　$f(t) \longrightarrow 0 \ (t\to-\infty)$ から、$y=f(t)$のグラフは右上図のようになる。したがって、aを固定した時、(②は$y=b$, $y=f(t)$の交点で与えられるので)

- $b\leq 0$ の時、解は 1つ
- $0<b<e^a$ 〃 2つ
- $b=e^a$ 〃 1つ
- $b>e^a$ 〃 0コ

となる。aの固定を解除して、

- $b\leq 0$ 又は $b=e^a$の時 1つ
- $0<b<e^a$ の時 2コ
- $b>e^a$ の時 0コ //

第 4 問

[解] $f_n(x)=x^n\sin^n x$ とおく。さらに、$p(x)=f_1(x)$ とする。はじめに(2)を証明する。

以下、$p(x)=p$, $\sin x=s$, $\cos x=c$ などと書く。

$$S_{n+2}+S_n>2S_{n+1}$$

$$\iff \int_0^{\pi/2} p^n(p^2+1)\,dx>2\int_0^{\pi/2} p^{n+1}\,dx$$

$$\iff \int_0^{\pi/2} p^n(p-1)^2\,dx>0 \qquad \cdots ①$$

であり、$[0,\pi/2]$ では $0\leq p$, $0\leq(p-1)^2$ だから、

$$0\leq p^n(p-1)^2$$

$[0,\pi/2]$ で積分し、常には等号が成立しないことから、

$$0<\int_0^{\pi/2} p^n(p-1)^2\,dx \qquad \cdots ②$$

①、②から(2)が示された。■ 以下(1)、(3)を示す。

ここで S_1, S_2 を計算する。

$$S_1=\int_0^{\pi/2} p\,dx=\Big[-xc+s\Big]_0^{\pi/2}=1$$

$$S_2=\int_0^{\pi/2} f_2(x)\,dx=\int_0^{\pi/2} x^2\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_0^{\pi/2}-\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}x^2\cdot\sin 2x+\frac{1}{4}\cdot 2x\cos 2x-\frac{1}{8}\cdot 2\cdot\sin 2x\Big]_0^{\pi/2}$$

$$=\frac{1}{6}(\pi/2)^3-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\left(\frac{-\pi}{2}\right)=\frac{\pi^3}{48}+\frac{\pi}{8}$$

であり、$\pi>3.14$ から

$$S_2>\frac{\pi}{8}\left(\frac{(3.14)^2}{6}+1\right)>\frac{2.64}{8}\cdot 3.14=\frac{8.2896}{8}>1=S_1$$

$$\therefore S_2>S_1 \quad ((1))$$

となる。したがって、(2)の不等式をくり返し用いて、

$$S_{n+1}-S_n>S_n-S_{n-1}>\cdots>S_2-S_1>0 \qquad \therefore S_{n+1}>S_n$$

だから $\{S_n\}$ は単調増加で、$m<n$ なら $S_m<S_n$ となる■ ((3))