T. k. 大数学 1979

30分

第 1 問

[解] $\begin{cases} l: x=y=z \\ m: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z}{-1} \end{cases}$

$t_n, s_n \in \mathbb{R}$として. $(n \in \mathbb{N})$

$P_n(t_n, t_n, t_n)$

$Q_n(2s_n, 3s_n+1, -s_n)$

とおける.条件から. $\overrightarrow{P_nQ_n} \perp m$, $\overrightarrow{Q_nP_{n+1}} \perp l$ だから

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 2s_n - t_n \\ 3s_n+1-t_n \\ -s_n - t_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix} 2s_n - t_{n+1} \\ 3s_n+1 - t_{n+1} \\ -s_n - t_{n+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4s_n+1 = 3t_{n+1} \\ 14s_n+3 = 4t_n \end{cases} \qquad s_n = \frac{3}{4}t_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{2}{7}t_n - \frac{3}{14}$$

s_nを消して.

$$\frac{2}{7}t_n = \frac{3}{4}t_{n+1} - \frac{1}{28}$$

$$t_{n+1} - \frac{1}{13} = \frac{8}{21}\left(t_n - \frac{1}{13}\right)$$

$$t_n = \left(\frac{8}{21}\right)^{n-1}\left(t_1 - \frac{1}{13}\right) + \frac{1}{13} \longrightarrow \frac{1}{13} \quad (n \to \infty)$$

$$s_n \longrightarrow \frac{4}{14}\cdot\frac{1}{13} - \frac{3}{14} = -\frac{5}{26} \quad (n \to \infty)$$

だから

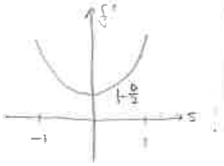
$$P_n \longrightarrow \left(\frac{1}{13}, \frac{1}{13}, \frac{1}{13}\right) \quad Q_n \longrightarrow \left(-\frac{5}{13}, \frac{11}{26}, \frac{5}{26}\right) \#$$

[解] $S=\sin x$とおく。$f(s)=s\left(1-\frac{a}{2}(1-s^2)\right)$のmaxが1となるaの値域をもとめれば良い。$f'(s)=\frac{3}{2}as^2+\left(-\frac{a}{2}+1\right)$より、aによって下表を得る。

ア：$a>0$の時

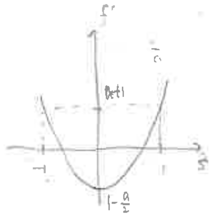
1° $-\frac{a}{2}+1\geq 0$ ∴ $0<a\leq 2$の時

$f'(s)\geq 0$から$f(s)$は$s=1$でmax 1



2° $1-\frac{a}{2}\leq 0\leq a+1$ ∴ $2\leq a$の時

s	-1		$-\sqrt{\frac{a-2}{3a}}$		$\sqrt{\frac{a-2}{3a}}$		1
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	1



$f\left(-\sqrt{\frac{a-2}{3a}}\right)=-\sqrt{\frac{a-2}{3a}}\,\frac{2-a}{3}\geq 0$ （∵ $2\leq a$）

であり、$f(-\alpha)\leq 1$の時$(a+1)^2(a-8)\leq 0$で、

$2\leq a\leq 8$の時である。 …①

（$f'(s)=0$の時 $s^2=\frac{a-2}{3a}$ $\alpha=\sqrt{\frac{a-2}{3a}}$とおく）

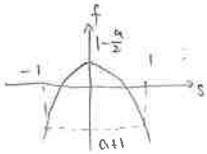
イ：$a=0$の時

$f'(s)=1>0$から、$\max f=f(1)=1$

ウ：$a<0$の時 $\left(1-\frac{a}{2}>0\right)$

1° $a+1\leq 0$ ∴ $a\leq -1$の時

s	-1		$-\alpha$		α		1
f'		$-$		$+$		$-$	
f	-1	$\searrow$		$\nearrow$			



$f(\alpha)=\alpha\frac{2-a}{3}=1$の時①より$a=-1$

2° $a+1\geq 0$ ∴ $-1\leq a<0$の時

$f'(s)>0$から$s=1$でmax 1

以上アへウより $-1\leq S\leq 8$

第 3 問

[解] $F(x)=P(x)C-Q(x)S$ とおく。$(C=\cos x,\ S=\sin x)$

(1) 全てのxに対して$F(x)=0$となる時. $P(x)\neq 0 \land Q(x)=0$ なるxに対して.

$A=P(x)^2+Q^2(x)$ とおいて. $(A\neq 0)$

$$F(x)=\sqrt{A}\sin(x+\alpha) \quad \left(\alpha \text{は} \tan\alpha=-\frac{P(x)}{Q(x)} \text{をみたす} -\pi/2<\alpha<\pi/2 \text{の数}\right)$$

とかける。これが任意のxで0になることはないので. $A=0$が恒等的に成り立つ。つまり恒等的に $P(x)=0,\ Q(x)=0$ である 図

(2) $P(x)\cdot C+\int_0^x Q(t)\sin t\,dt=(x^2+2x+3)S$ …①

$x=0$として.

$P(0)=0$ …②

①の両辺xで微分して

$$-P(x)S+P'(x)C+Q(x)S=(2x+2)S+(x^2+2x+3)C$$

$$[Q(x)-P(x)-(2x+2)]S=(x^2+2x+3-P'(x))C$$

P, Qは3次以下で. (1)とあわせて

$$\begin{cases} Q(x)-P(x)=2x+2 & \text{…③} \\ P'(x)=x^2+2x+3 & \text{…④} \end{cases}$$

④の両辺積分して. ②とあわせて

$P(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+3x$ //

③に代入

$Q(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+5x+2$ //

第 4 問

[解] $C: y=\log x$, $(\log x)'=\frac{1}{x}$ より. C 上 $x=t$ での接線は

$$l_t: y=\frac{1}{t}(x-t)+\log t$$

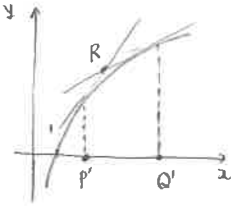
だから

$$l_a: y=\frac{1}{a}(x-a)+\log a$$

$$l_c: y=\frac{1}{c}(x-c)+\log c$$

となり l_a, l_c の交点は $R\left(\frac{\log c-\log a}{c-a}ac,\ \underbrace{\frac{c}{c-a}\log c-\frac{a}{c-a}\log a}_{A}\right)$ である。

$$S=\int_a^c \log x\,dx=\Big[x(\log x-1)\Big]_a^c \quad \cdots ①$$



$$T=\frac{1}{2}(c-a)A$$

$$=\frac{1}{2}\left(f(c)-f(a)\right) \quad \cdots ②$$

ただし, $f(x)=x\log x$ とおいた。①②から

$$S:T=c(\log c-1)-a(\log a-1):\frac{1}{2}(c\log c-a\log a)$$ //