T. K. 大数学 1978

第 1 問

[解] $(x^3+ax^2+bx+c)^2=(x^2-1)(x^2+px+q)^2+D$ …①

が x についての恒等式である。左辺，右辺を各々 $f(x)$, $g(x)$ とする。

$$f(x)=x^6+2ax^5+(2b+a^2)x^4+(2c+2ab)x^3+(2ac+b^2)x^2+2bcx+c^2$$

$$g(x)=x^6+2px^5+(p^2+2q-1)x^4+(2pq-2p)x^3+(q^2-p^2-2q)x^2-2pqx-q^2+D$$

係数比較して

$$a=p,\ 2b=2q-1,\ c+ab=pq-p,\ 2ac+b^2=q^2-p^2-2q,\ bc=-pq,\ c^2=-q^2+D$$

を得る。したがって，第1,2式から

$$\begin{cases} a=p \\ b=q-\frac{1}{2} \end{cases}$$ …②

第3式に代入して

$$c=-\frac{1}{2}p$$ …③

第4式から $q=-\frac{1}{4}$ …④ だから②より，$b=-\frac{3}{4}$ となる。第5式から，

$$\frac{3}{8}p=-\frac{1}{4}p \qquad \therefore p=0$$

だから ②,③より $a=c=0$ で，最後の式から

$$D=c^2+q^2=0+\frac{1}{16}=\frac{1}{16}$$ //

[解] $A=(bc-1)(ca-1)(ab-1)$とおく。以下$a.b.c\in\mathbb{N}$に注意する。

$$A=(abc)^2-(a^2bc+ab^2c+abc^2)+(bc+ca+ab)-1$$
$$=(abc)^2-(a+b+c)(abc)+(bc+ca+ab-1)$$

だから $A/abc\in\mathbb{Z}$となる時 $(bc+ca+ab-1)/abc\in\mathbb{Z}$ つまり $bc+ca+ab-1$がabcで割り切れる。□ (以上(1))

したがって $k\in\mathbb{N}$に対し ($\because bc+ca+ab-1>0$)

$$\frac{bc+ca+ab-1}{abc}=k$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{abc}=k \quad \cdots ①$$

とおける。又, $a\in\mathbb{N}$及び題意から

$$2\leq a<b<c \ , a.b.c\in\mathbb{N} \quad \cdots ②$$

である。②から

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{abc}<\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}-\frac{1}{abc}=\frac{1}{a}(3-1/bc)$$

となり, ①及び$k\in\mathbb{N}$から

$$1<\frac{1}{a}(3-1/bc) \qquad \therefore a<3-1/bc<3 \ (\because a,b,c,>0)$$

②とあわせて$a=2$が必要。①に代入して

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{2}\frac{1}{bc}=k-\frac{1}{2} \quad \cdots ③$$

同様にして

$$\frac{1}{2}\leq k-1/2<\frac{1}{b}(2-\frac{1}{2c}) \qquad \therefore b<2(2-1/2c)<4 \ (\because b,c>0)$$

だから②より. $b=3$が必要。③に代入して

$$\frac{1}{c}-\frac{1}{6}\frac{1}{c}=k-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$$\therefore c=\frac{1}{\frac{6}{5}k-1} \qquad (\because k\in\mathbb{N}\text{から}\ \tfrac{6}{5}k-1>0)$$

$c\in\mathbb{N}$かつ$c>b=3$より

$$\frac{1}{\frac{6}{5}k-1}>3 \iff k<\frac{25}{18} \qquad (\because \tfrac{6}{5}k-1>0)$$

から $k=1$が必要で. この時$c=5$で条件をみたし十分。

題意をみたす$a.b.c$の組は. ①∧②をみたすkが存在する$(a.b.c)$の組と同じだから 以上より. $(a.b.c)=(2,3.5)$ //

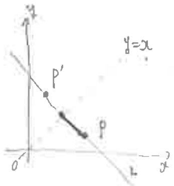
第 3 問

[解]

(1) Lの方程式は $\frac{\sqrt{2}}{2}rx+\frac{\sqrt{2}}{2}ry=r^2$ ∴ $\sqrt{2}x+\sqrt{2}y=2r$ だから、方向ベクトル $\vec{l}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ で、

PがL上の点の時 $\sqrt{2}a+\sqrt{2}b=2r$ で、これは $P'(b,a)$ がL上にあることも意味する。したがって

tを係として



$$\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}+(a-b)\cdot t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

と表せる。(∵ $P\neq\left(\frac{\sqrt{2}}{2}r,\frac{\sqrt{2}}{2}r\right)$ より、$a\neq b$) したがって

$$\begin{cases}c=b+(a-b)t=at+(1-t)b\\ d=a+(a-b)t(-1)=(1-t)a+tb\end{cases}$$

と表せる。■

(2) $\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+(1-t)\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}$ より、(c,d) は $\overline{PP'}$ 上にある時、$P'P$ の $t:1-t$ 内分点である。これと

接点Rが $\overline{PP'}$ の中点であることから tの条件は

$$\frac{1}{2}\leq t\leq 1$$ //

$a_{n+1} = -a_n - 3n$

第 4 問

[解] 題意から.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n + a_{n+1} = -3n \\ a_n a_{n+1} = c_n \end{cases} \quad \cdots ①$$

である。したがって

$$a_{n+1} + \frac{3}{2}(n+1) - \frac{3}{4} = -\left\{ a_n + \frac{3}{2}n - \frac{3}{4} \right\}$$

だから、くり返し用いて

$$a_n = (-1)^{n-1}\left\{ 1 + \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \right\} - \frac{3}{2}n + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{7}{4}(-1)^{n-1} + \frac{3}{4} - \frac{3}{2}n$$

$$\therefore \begin{cases} a_{2k} = -3k-1 \\ a_{2k-1} = -3k+4 \end{cases}$$

となるので、

$$\begin{cases} c_{2k-1} = c_{2k-1} \cdot c_{2k} = (-3k+4)(-3k-1) \\ c_{2k} = c_{2k} \cdot c_{2k+1} = (-3k+1)(-3k-1) \end{cases} \quad \cdots ②$$

より

$$\sum_{k=1}^{2p} c_k = \sum_{k=1}^{p} (c_{2k-1} + c_{2k})$$

$$= \sum_{k=1}^{p} (-3k-1)(-6k+5) \qquad (\because ②)$$

$$= \sum_{k=1}^{p} (+18k^2 - 9k - 5)$$

$$= 18 \cdot \frac{1}{6}p(p+1)(2p+1) - \frac{9}{2}p(p+1) - 5p$$

$$= 3p(p+1)(2p+1) - \frac{9}{2}p(p+1) - 5p$$

$$= p(p+1)\left\{ 6p + 3 - \frac{9}{2} \right\} - 5p$$

$$= 6p^3 + \frac{9}{2}p^2 - \frac{13}{2}p \ /\!/$$

第 5 問

[解] $h(x)=f(x)-g(x)$ とおく。$h(x)$ は4次のモニック多項式であり, $h(1)=h(-1)=0$ より,

因数定理から, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ として

$$h(x)=(x+1)(x-1)(x^2+\alpha x+\beta) \quad \cdots ①$$

とかける。したがって,

$$\{h(x)\}^2=(x^2-1)^2(x^4+2\alpha x^3+(\alpha^2+2\beta)x^2+2\alpha\beta x+\beta^2)$$

だから, $A=\int_{-1}^{1}\{h(x)\}^2dx$ として,

$$A=2\int_0^1(x^2-1)^2(x^4+(\alpha^2+2\beta)x^2+\beta^2)dx$$

$$\therefore \frac{1}{2}A=\alpha^2\int_0^1(x^2-1)^2x^2dx+2\beta\int_0^1(x^2-1)^2x^2dx+\beta^2\int_0^1(x^2-1)^2dx+\int_0^1x^4(x^2-1)^2dx$$

$$=\alpha^2\int_0^1(x^2-1)^2x^2dx+\frac{8}{15}\beta^2+\frac{16}{105}\beta+\int_0^1x^4(x^2-1)^2dx$$

$$=\alpha^2\int_0^1(x^2-1)^2x^2dx+\frac{8}{15}\left\{\left(\beta+\frac{1}{7}\right)^2-\frac{1}{49}\right\}+\int_0^1x^4(x^2-1)^2dx \quad \cdots ②$$

である。$\int_0^1x^2(x^2-1)^2dx>0$ だから, ②より, A の min を与える (α, β) は $(\alpha, \beta)=\left(0, -\frac{1}{7}\right)$ である。

$\cdots$ ③。さて, ①から, ③の時,

$$h(x)=x^4+\alpha x^3+(\beta-1)x^2-\alpha x-\beta$$

$$=x^4-\frac{8}{7}x^2+\frac{1}{7}$$

だから, $(a, b, c, d)=\left(0, \frac{8}{7}, -1, -\frac{1}{7}\right)$ とすれば良い。//

第 6 問

[解] $-1 \leqq a \leqq 1$から,

$$I(a) = \int_{-1}^{a} (a-x)\cdot e^x dx + \int_{a}^{1} (x-a) e^x dx$$

$$= a\int_{-1}^{a} e^x dx - a\int_{a}^{1} e^x dx - \int_{-1}^{a} x e^x dx + \int_{a}^{1} x e^x dx$$

となる。

$$I'(a) = \int_{-1}^{a} e^x dx + a e^a - \int_{a}^{1} e^x dx + a e^a - a e^a - a e^a$$

$$= \int_{-1}^{a} e^x dx - \int_{a}^{1} e^x dx$$

$$= \left[e^x\right]_{-1}^{a} - \left[e^x\right]_{a}^{1} = (e^a - 1/e) - (e - e^a) = 2e^a - \left(e + \frac{1}{e}\right)$$

から,下表を得る。

a	-1		$\log\frac{e^2+1}{2e}$		1
I'		$-$	0	$+$	
I		$\searrow$		$\nearrow$	

したがって 最大値は $I(1)$, $I(-1)$ のうち小さくない方である。

$$I(1) = \int_{-1}^{1} (1-x) e^x dx = \left[e^x(1-x+1)\right]_{-1}^{1} = e - \frac{3}{e}$$

$$I(-1) = \int_{-1}^{1} (x+1) e^x dx = \left[e^x(x+1-1)\right]_{-1}^{1} = e + \frac{1}{e}$$

故に $I(-1) > I(1)$ ($\because e > 0$) だから,もとめる max は

$$I(-1) = e + \frac{1}{e} \quad //$$