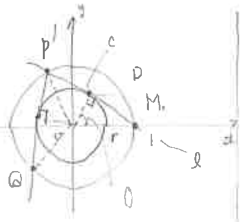
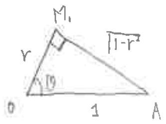
T. K. 大数学 1977

[解] $A(1,0)$とする。$\overline{AP}$の中点 M_1 とする。
$\angle M_1OA=\theta$ とすると、$\overrightarrow{OA}$ から $\overrightarrow{OQ}$ へ向かう角は 4θ であるから、$Q(\cos 4\theta, \sin 4\theta)$ となる。…①



ここで、右下の三角形 $\triangle M_1OA$ に注目して、

$$\sin\theta=\sqrt{1-r^2},\quad \cos\theta = r \qquad \cdots ②$$



だから、

・$\cos 4\theta = 2\cos^2 2\theta -1$
$= 2(2\cos^2\theta-1)^2-1$
$= 2(2r^2-1)^2-1$　(∵②)
$= 8r^4-8r^2+1$

・$\sin4\theta = 2\sin2\theta\cos2\theta$
$= 4\sin\theta\cos\theta\cdot(2\cos^2\theta-1)$
$= 4r\sqrt{1-r^2}\,(2r^2-1)$

となるので、①から

$$Q(8r^4-8r^2+1,\ 4r(2r^2-1)\sqrt{1-r^2})$$

＃

[解] $A=\{20, 21, 22, 23, 24\}$, $B=\{25, 26, 27, 28, 29\}$, $C=\{80, 81, 82, 83, 84\}$, $D=\{85, 86, 87, 88, 89\}$とする。題意の試行では、A, Bのうちから1つ、C, Dのうちから1つ数をとり出す。その組は以下で全てである。

	A	B
C	ア	イ
D	ウ	エ

このうち、アでは必ず $S \geqq S'$、エでは必ず $S<S'$ となる。 …①

そこで、以下イ、ウについて考える。

1° イの時

B, Cの数は四捨五入すると各々30, 80になるから、$S'=2400$である。一方、Sは以下のようになる。(○は $2400>S$ を、×は $2400 \leqq S'$ を表す)

C \ B	25	26	27	28	29
80	○	○	○	○	○
81	○	○	○	○	○
82	○	○	○	○	○
83	○	○	○	○	×
84	○	○	○	○	×

2° ウの時

A, Dの数は四捨五入すると各々20, 90になるから、$S'=1800$である。Sの表は以下

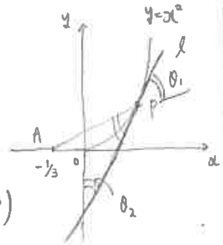
D \ A	20	21	22	23	24
85	○	○	×	×	×
86	○	×	×	×	×
87	○	×	×	×	×
88	○	×	×	×	×
89	○	×	×	×	×

①、1°、2°から、全ての選び方 $10^2=100$ 通りのうち、$S<S'$ となるのは

$$\underset{①}{25}+\underset{1°}{23}+\underset{2°}{6}=54\text{通り}$$

だから、もとめるカクリツは $\dfrac{54}{100}=\dfrac{27}{50}$

第 3 問



[解1] $t>0$に対し、$x=t$とすると、$P(t,t^2)$である。Pにおける接線ℓは$(x^2)'=2x$より、

$$\ell: y=2tx-t^2 \quad \left(\text{方向ベクトル } \vec{l}=\binom{1}{2t}\right)$$

である。この時、直線APの方程式は、

$$AP: y=\frac{t^2}{t+1/3}(x+1/3) \quad \left(\text{方向ベクトル } \vec{m}=\binom{t+1/3}{t^2}\right)$$

となる。y軸と平行なベクトル$\vec{n}=\binom{0}{1}$をおき、$\vec{l}$と$\vec{m}$，$\vec{l}$と$\vec{n}$のなす角を各々θ_1,θ_2とすると、$(0\leq\theta_1,\theta_2\leq\pi)$ $t>0$から$\theta_1,\theta_2\neq\pi/2$であるから、題意から、

$$\therefore \quad \tan\theta_2=\pm\tan\theta_1 \quad \cdots ①$$

となる。

$$\tan\theta_1=\frac{|t^2-2t(t+1/3)|}{\vec{l}\cdot\vec{m}}=\frac{|t^2+\frac{2}{3}t|}{t+1/3+2t^3}=\frac{t^2+\frac{2}{3}t}{2t^3+t+1/3} \quad (\because t>0)$$

$$\tan\theta_2=\frac{|1|}{\vec{l}\cdot\vec{n}}=\frac{1}{2t}$$

だから、$\tan\theta_1,\tan\theta_2>0$であることより、①で複号正を採用して代入して

$$\frac{1}{2t}=\frac{t^2+\frac{2}{3}t}{2t^3+t+1/3}$$

$$\therefore \quad 2t^3+t+\frac{1}{3}=2t^3+\frac{4}{3}t^2$$

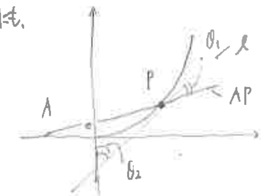
$$\therefore \quad t=1 \quad (\because t>0)$$

となり、$\underline{P(1,1)}$ である。

[解2] ℓ, APの傾きを各々$l=\tan\alpha$, $m=\tan\beta$とおく。$\left(-\frac{\pi}{2}<\alpha,\beta<\frac{\pi}{2}\right)$

$$l=2t,\quad m=\frac{t^2}{t+1/3}$$

である。右図のようにθ_1,θ_2をとると、どのような場合にも、



$$\begin{cases}\theta_1=\pi-(\alpha-\beta)\\ \theta_2=\frac{\pi}{2}-\alpha\end{cases} \quad \cdots *$$

となる。題意から

$$\tan\theta_2=\pm\tan\theta_1$$

であり、*から、

$$\frac{1}{\tan\alpha}=\pm\tan(\alpha-\beta)=\pm\frac{2t-\frac{t^2}{t+1/3}}{1+2t\frac{t^2}{t+1/3}}=\frac{t^2+\frac{2}{3}t}{2t^3+t+1/3}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2t}=\frac{t^2+\frac{2}{3}t}{2t^3+t+1/3}$$

(以下略)

第 4 問

[解] $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $m<n$, $0<x<1$ … ① である。$f(t)=\left(1+\frac{x}{t^2}\right)^t$ とする。$f(t)>0$ ゆえ、自然対数をとってから微分して

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \log(1+x/t^2) + \frac{t}{1+x/t^2}(-2)\frac{1}{t^3}$$

$$= \log(1+x/t^2) - 2\frac{1}{x+t^2} \quad \cdots ②$$

この右辺を $g(t)$ とする。

$$g'(t) = \frac{1}{1+x/t^2}(-2)\frac{1}{t^3} + 2\left(\frac{1}{t^2+x}\right)^2 \cdot 2t$$

$$= -2\frac{1}{t}\frac{1}{x+t^2} + 4t\left(\frac{1}{x+t^2}\right)^2$$

$$= \frac{2(t^2-x)}{t(x+t^2)^2}$$

だから、①より、$1 \le t$ の時、$g'(t)>0$ で、$g(t)$ は単調増加となる。これと

$$g(t) \xrightarrow{t \to +\infty} 0$$

から、$1 \le t$ の時、$g(t)<0$ となる。したがって②から、$1 \le t$ の時、$f'(t)<0$ つまり $f(t)$ は単調減少である。… ③

①③から、$f(n)<f(m)$ つまり、$\left(1+\frac{x}{m^2}\right)^m > \left(1+\frac{x}{n^2}\right)^n$ である。

第 5 問

[解] $f(x)$は任意の x に対し $f(x)=f(x+2\pi)$ をみたす。 ---①

(1) $s=t-x$ とすると

$$\int_0^{2\pi} f(t-x)\cdot\sin t\,dt = \int_{-x}^{2\pi-x} f(s)\sin(x+s)\,ds$$

$$= \int_{-x}^{0} f(s)\sin(x+s)\,ds + \int_0^{2\pi-x} f(s)\sin(x+s)\,ds$$

$$= \int_{2\pi-x}^{2\pi} f(p-2\pi)\sin(x+p-2\pi)\,dp + \int_0^{2\pi-x} f(s)\sin(x+s)\,ds$$ (第一項で $p=s+2\pi$ とした)

$$= \int_{2\pi-x}^{2\pi} f(p)\sin(x+p)\,dp + \int_0^{2\pi-x} f(s)\sin(x+s)\,ds$$ (∵①、及び $\sin(p+2\pi)=\sin p$)

$$= \int_0^{2\pi} f(s)\sin(x+s)\,ds$$ 圏

(2) (1)から

$$\int_0^{2\pi} f(t)\sin(x+t)\,dt = c f(x)$$ ---②

が x についての恒等式になれば良い。以下 $S=\sin x$, $P=\cos x$ とする。②の左辺を変形する。

$$(②の左辺) = \int_0^{2\pi}\{f(t)\cos t\cdot S + f(t)\sin t\cdot P\}\,dt$$

$$= S\int_0^{2\pi} f(t)\cos t\,dt + P\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\,dt$$ ---③

$A=\int_0^{2\pi} f(t)\cos t\,dt$, $B=\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\,dt$ ---④ とおいて、②、③より、

$$f(x) = \frac{1}{c}\{AS+BP\} = \frac{A}{c}S + \frac{B}{c}P$$ ---④

④に代入して、

$$A = \int_0^{2\pi}\left\{\frac{A}{c}SP + \frac{B}{c}P^2\right\}dx$$

$$= \left[\frac{A}{c}\cdot\frac{-1}{4}\cos 2x + \frac{B}{c}\cdot\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{B}{c}\pi$$ ---⑤

$$B = \int_0^{2\pi}\left\{\frac{A}{c}S^2 + \frac{B}{c}SP\right\}dx$$

$$= \left[\frac{A}{c}\cdot\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right) + \frac{B}{c}\left(-\frac{1}{4}\right)\cos 2x\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{A}{c}\pi$$ ---⑥

⑤、⑥及び $f(0)=1$ から $(A,B)=(0,0)$ ではなく、$C=B$ である (∵④) ことから、

$$(A,B,C)=(\pi,\pi,\pi)$$

となり、④から

$$f(x)=\sin x+\cos x,\quad C=\pi$$ //

を得る。

[解] 任意の$n\in\mathbb{N}$に対し、$|a_n|\leq 1$となることを示す。まず、$a_N=1$及び$a_{n+1}=2a_n^2-1$から、$n\geq N$の時は$a_n=1$で成立する。そこで以下$n\leq N$の時を考える。$n=k\in\mathbb{N}\ (2\leq k\leq N)$での成立を仮定すると、

$$a_{k-1}^2=\frac{1}{2}(a_k+1)$$

$$\therefore\ 0\leq a_{k-1}^2\leq 1 \qquad (\because\ |a_k|\leq 1)$$

$$\therefore\ |a_{k-1}|\leq 1$$

となり$n=k-1$でも成立。したがって、帰納法により、任意の$n\in\mathbb{N}$に対して$|a_n|\leq 1$となる。したがって(1)の主張$|a_1|\leq 1$が従う。■

この時、$a_n=\cos\theta_n$とおける。漸化式から

$$\cos\theta_{n+1}=\cos 2\theta_n \qquad \therefore\ \theta_{n+1}=2\theta_n \qquad \therefore\ \theta_n=2^{n-1}\cdot\theta_1 \qquad \cdots ①$$

これと$\theta_N=2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$から、

$$\theta_1=\frac{\theta_N}{2^{N-1}}=\frac{k\pi}{2^{N-2}}$$

と書ける。■ (以上(2))

第 6-6 問