T. K. 大数学 1976

第 1 問

[解] x^4をP(x)でわった商をA(x)，あまりをQ(x)とする。又，x^5をP(x)でわった商をB(x)とする。

$$\begin{cases} x^4 = A(x)\cdot P(x) + Q(x) \\ x^5 = B(x)\cdot P(x) + Q(x) \end{cases}$$

したがって，辺々引いて，

$$x^4(x-1) = \{B(x) - A(x)\}P(x)$$

だから $x^4(x-1)$はP(x)でわり切れるので，aを非0として

$$P(x) = ax^3,\quad a(x-1)\cdot x^2$$

である。題意から，Q(x)≠0 だから前者は不適で，$P(x) = a(x-1)\cdot x^2$である。 --①

次に，f(x)をP(x)でわった商C(x)，f(x)·xをP(x)でわった商をD(x)とする。

$$\begin{cases} f(x) = C(x)\cdot P(x) + r(x) & \text{--②} \\ x f(x) = D(x)\cdot P(x) & \text{--③} \end{cases}$$

②×xと③を辺々引いて，

$$0 = \{x\cdot C(x) - D(x)\}\cdot P(x) + x\cdot r(x)$$

より，r(x)·xはP(x)でわり切れ，かつ②より，r(x)は2次以下だから，①より，

$$r(x) = ax(x-1)$$

である。r(x)の最高次係数1から，a=1として，

$$r(x) = x(x-1)$$
//

－1

第 2 問

[解] 与式の両辺0以上かつ, $1+4x^2>0$, $c>0$ から, 平方根をとって

$$|b+x^2| > c\sqrt{1+4x^2}$$

$t=x^2$ $(t\geq 0)$ として,

$$|b+t| > c\sqrt{1+4t} \quad \cdots ①$$

である。$b\leq 0$ の時, $t=-b$ (≥ 0) を①に代入すると

$$0 > c\sqrt{1-4b}$$

となり不適。したがって $0<b$ が必要である。この時, ①から

$$b > c\sqrt{4t+1} - t = f(t) \quad \cdots ②$$

とすると

$$f'(t) = \frac{4c}{2\sqrt{4t+1}} - 1 = \frac{2c-\sqrt{4t+1}}{\sqrt{4t+1}}$$

から, c によって以下のようになる。

1° $c\leq \frac{1}{2}$ の時

$f'(t)\leq 0$ となり, $f(t)$ は単調減少である。したがって②が全ての t で成立する条件は

$$b > f(0) = c \quad \cdots ③$$

2° $\frac{1}{2}\leq c$ の時

下表をうる。

t	0		$c^2-\frac{1}{4}$	
f'		$+$	0	$-$
f		$\nearrow$		$\searrow$

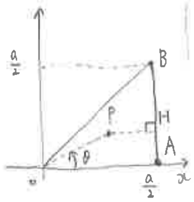
したがって, 1°と同様に, 条件は

$$b > f\left(c^2-\frac{1}{4}\right) = c^2+\frac{1}{4} \quad \cdots ④$$

以上③, ④は $b>0$ をみたし十分であるから,

$$\begin{cases} 0<c\leq \frac{1}{2} \text{ の時} & b>c \\ \frac{1}{2}\leq c \text{ の時} & b>c^2+\frac{1}{4} \end{cases}$$

//



[解] 対称性から、右図の△OAB内でPがうごく時のみをかんがえる。この時、Pと最も近い辺はABである。PからABに下ろした垂足Hとし、Oを極、x軸正方向を始線とする極座標でP(r, θ)とおく。(r, θ≧0) 題意から、

$$\overline{OP}=\overline{PH} \iff r=\frac{a}{2}-r\cos\theta$$

$$\iff r=\frac{\frac{1}{2}a}{1+\cos\theta} \quad (0\leqq\theta\leqq\pi/4) \qquad \cdots ①$$

この時、たしかにPは△OAB内にある。対称性から、もとめる面積S、Sのうち△OAB内のものS'として、

$$S=8S' \qquad \cdots ②$$

であり、

$$S'=\int_0^{\pi/4}\frac{1}{2}r^2\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\frac{a^2}{4}\int_0^{\pi/4}\frac{1}{(1+\cos\theta)^2}\,d\theta$$

$$=\frac{a^2}{8}\int_0^{\pi/4}\frac{1}{4\cos^4\frac{\theta}{2}}\,d\theta \qquad (以下 C=\cos\tfrac{\theta}{2},\ t=\tan\tfrac{\theta}{2} とする)$$

$$=\frac{a^2}{32}\int_0^{\pi/4}(1+t^2)\frac{1}{C^2}\,d\theta$$

$$=2\frac{a^2}{32}\left[t+\frac{1}{3}t^3\right]_0^{\pi/4}$$

$$=\frac{a^2}{16}\left(\tan\frac{\pi}{8}+\frac{1}{3}\tan^3\frac{\pi}{8}\right) \qquad \cdots ③$$

ここで、$p=\tan\frac{\pi}{8}$とすると $p>0$より、

$$\tan\frac{\pi}{4}=\frac{2p}{1-p^2} \quad \therefore\ p^2+2p-1=0 \quad \therefore\ p=-1+\sqrt{2}$$

だから、③より

$$S'=\frac{a^2}{16}(-1+\sqrt{2})\left(1+\frac{1}{3}(-1+\sqrt{2})^2\right)$$

$$=\frac{a^2}{16}(-1+\sqrt{2})\left(\frac{6-2\sqrt{2}}{3}\right)$$

となって、②に代入して

$$S=\frac{a^2}{2}\,\frac{2}{3}(-1+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})$$

$$=\frac{a^2}{3}(-5+4\sqrt{2})$$ //

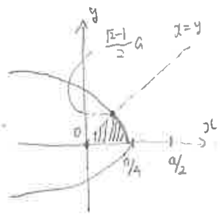
[解2] (△OAB内で考える)

Pのキセキは、Oを焦点、ABを準線とする放物線で、その方程式は $\alpha=\frac{1}{4}a$として

$$y^2=-4\alpha\left(x-\frac{a}{4}\right)$$

$$=-a\left(x-\frac{a}{4}\right)$$

である。よって右図斜線部の面積S'は



$$S'=\int_0^{\frac{\sqrt{2}-1}{2}a}\left(-\frac{1}{a}y^2+\frac{a}{4}\right)dy-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}a\right)^2$$

$$=-\frac{1}{3a}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}a\right)^3+\frac{a}{4}\,\frac{\sqrt{2}-1}{2}a-\frac{1}{8}(3-2\sqrt{2})a^2$$

$= -5+4\sqrt{2}$ …　∴ $S=-5+4\sqrt{2}\ a^2$

第 4 問

[解] $A=\int_0^1 f(t)e^{-t}dt$ とおく。与式の両辺は x で微分できる。

$$f(x)=e^{x}-2aAe^{2x} \quad \cdots ①$$

A の式に代入して

$$A=\int_0^1(e^{t}-2aA\cdot e^{2t})e^{-t}dt$$
$$=\int_0^1(1-2aA\cdot e^{t})dt$$
$$=\left[t-2aA\cdot e^{t}\right]_0^1=1-2aA(e-1)$$

$$\therefore A=\frac{1}{1+2a(e-1)} \quad (\because 1+2a(e-1)=0 \text{ は } 0=1 \text{ で矛盾}) \quad \cdots ②$$

次に、与式に $x=0$ を代入すると、

$$0=1-Aa \qquad \therefore Aa=1 \quad \cdots ③$$

である。②、③から

$$(A, a)=\left(3-2e, \frac{1}{3-2e}\right)$$

だから、

$$f(x)=e^{x}-2e^{2x}, \quad a=\frac{1}{3-2e}$$ //

第　5　問

［解］$\vec{g}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ とおく。又与方程式 $x^2+2y^2+3z^2=1$ を①とする。

(1) ①は $(x,y,z)=(1,0,0)\ \left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)\ \left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ で成立するので、これを順に $\vec{g}$ に代入して

$$|\vec{g}|=|\vec{a}|=\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{b}\right|=\left|\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{c}\right|=1 \qquad \therefore |\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=\sqrt{2},\ |\vec{c}|=\sqrt{3}$$ //

(2) ①は $(x,y,z)=\left(\frac{1}{2},\sqrt{\frac{3}{8}},0\right)\ \left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)\ \left(0,\frac{1}{2},\sqrt{\frac{1}{6}}\right)$ で成立するので $|\vec{g}|^2=1$ に代入して

$$\begin{cases}\frac{1}{4}|\vec{a}|^2+\frac{3}{8}|\vec{b}|^2+2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{8}}\,\vec{a}\cdot\vec{b}=1\\ \frac{1}{4}|\vec{a}|^2+\frac{1}{4}|\vec{c}|^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\vec{a}\cdot\vec{c}=1\\ \frac{1}{4}|\vec{b}|^2+\frac{1}{6}|\vec{c}|^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{6}}\,\vec{b}\cdot\vec{c}=1\end{cases} \qquad \therefore \begin{cases}\vec{a}\cdot\vec{b}=0\\ \vec{a}\cdot\vec{c}=0\\ \vec{b}\cdot\vec{c}=0\end{cases}$$ //

第 6 問　　{1例]

[解]