T. K. 大数学 1975

第 1 問

[解] $\begin{cases} ax+3by=1 \\ bx+ay=0 \end{cases}$ …①

を x, y についてとくと、$a^2-3b^2 \neq 0$ のもとで、

$$x=\frac{a}{a^2-3b^2} \qquad y=\frac{-b}{a^2-3b^2} \quad \cdots ②$$

又、$a^2-3b^2=0$ の時、$a=\pm\sqrt{3}b$ であり、$b=0$ の時、$a=0$ となるが、①から $0=1$ で矛盾。

$b \neq 0$ の時 $\pm\sqrt{3}=\frac{a}{b}$ となり、$a, b \in \mathbb{Z}$ から、(有理数)=(無理数)となり矛盾。したがって、

$a^2-3b^2 \neq 0$ のもとで考えれば良い。そこで、②において、$x, y \in \mathbb{Z}$ から、

$$\begin{cases} 1^\circ\ a=0,\ b\neq 0 & (\because (a,b)\neq(0,0)) \\ 2^\circ\ b=0,\ a\neq 0 & (\quad〃\quad) \\ 3^\circ\ ab\neq 0,\ -a \leq a^2-3b^2 \leq a,\ -b \leq a^2-3b^2 \leq b & (\because a, b \geq 0) \end{cases}$$

のいずれかである。

1°の時

②から $(x,y)=\left(0, \frac{1}{3b}\right)$ で、$\frac{1}{3b} \notin \mathbb{Z}$ から、($\because b=0, 1, \cdots, 5$) $y \in \mathbb{Z}$ に不適。

2°の時

②から $(x,y)=\left(\frac{1}{a}, 0\right)$ で、$a=1$ のみ、$x \in \mathbb{Z}$ をみたす。($0<a$ のもとで) よって $(a,b)=(1,0)$

3°の時

$b=0, 1, \cdots, 5$ を代入して、条件をみたす a をあげると、($a \geq 0$)

$b=0$ … $a=0$
$b=1$ … $a=2$
$b=2$ … ナシ
$b=3$ … $a=5$
$b=4$ … $a=7$
$b=5$ … ナシ

このうち $(x,y) \in \mathbb{Z}$ となるのは $(a,b)=(2,1)\ (7,4)$ のみである。

以上から、

$(a,b)=(2,1)\ (7,4)\ (1,0)$ //

[解] $f(x)=0$ の2解 α, β として. $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$ とおく。

$$f(f(x)) = (f(x)-\alpha)(f(x)-\beta) = 0 \quad \cdots ①$$

が重解 r を持つ。$\alpha \neq \beta$ だから対称性から. $f(x)-\alpha=0$ が重解を持つ時のみ考えれば良い。$f(x)-\alpha = x^2+2x+\alpha\beta-\alpha=0$ の判別式 D として $D=0$ である。

$$D/4 = 1-(\alpha\beta-\alpha)=0 \qquad \therefore\ 1+\alpha-\alpha\beta=0 \quad \cdots ②$$

$\alpha+\beta=-2$ ∴ $\beta=-(\alpha+2)$ だから. ②に代入して

$$1+\alpha+\alpha(\alpha+2)=0$$

$$\alpha^2+3\alpha+1=0$$

$$\alpha=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$$

したがって $(\alpha, \beta)=\left(\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}, -\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)$ (複号同順) となり.

$$a=\alpha\beta=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad /\!/$$

である。この時 $r=-1$ // となる.

第 3 問

[解] 与式を①とおく。真数条件から $\frac{x-2}{x-1}>0 \wedge \frac{3-x}{x}>0 \Leftrightarrow 0<x<1,\ 2<x<3$ …②である。

1° $0<a<1$

① $\Leftrightarrow \frac{x-2}{x-1}<\frac{3-x}{x} \Leftrightarrow (x-2)(x-1)x^2<(3-x)x(x-1)^2$

$\Leftrightarrow x(x-1)(2x^2-6x+3)<0$

$\Leftrightarrow 0<x<\frac{3-\sqrt{3}}{2},\ 1<x<\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

だから②とあわせて.

$$0<x<\frac{3-\sqrt{3}}{2},\quad 2<x<\frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

2° $1<a$

① $\Leftrightarrow \frac{x-2}{x-1}>\frac{3-x}{x} \Leftrightarrow x<0,\ \frac{3-\sqrt{3}}{2}<x<1,\ \frac{3+\sqrt{3}}{2}<x$

だから②とあわせて.

$$\frac{3-\sqrt{3}}{2}<x<1,\quad \frac{3+\sqrt{3}}{2}<x<3$$

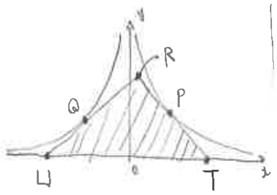
以上まとめて、

$$\begin{cases} 0<a<1 \text{ の時 } & 0<x<\frac{3-\sqrt{3}}{2},\ 2<x<\frac{3+\sqrt{3}}{2} \\ 1<a \text{ の時 } & \frac{3-\sqrt{3}}{2}<x<1,\ \frac{3+\sqrt{3}}{2}<x<3 \end{cases}$$

//

第 4 問

[解] 2接点を $P(t,\frac{1}{t})$ $Q(-s,\frac{1}{s})$ $(t,s>0)$ とすると、P, Qでの接線は $(\frac{1}{x})'=-\frac{1}{x^2}$ から、



$$l_P: y=-\frac{1}{t^2}x+\frac{2}{t}$$

$$l_Q: y=+\frac{1}{s^2}x+\frac{2}{s}$$

となり、交点R、l_Pのx切片T、l_Qのx切片Цとすると

$$\begin{cases} R\left(2\frac{ts(s-t)}{t^2+s^2},\ 2\frac{t+s}{t^2+s^2}\right) \\ T(2t,0),\ Ц(-2s,0) \end{cases}$$

だから、題意の△の面積fは、Rからx軸への垂足Hとして

$$f=\overline{TЦ}\times\overline{RH}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(2t+2s)\cdot 2\frac{t+s}{t^2+s^2}$$

$$=2\frac{(t+s)^2}{t^2+s^2}=2\left(1+\frac{2ts}{t^2+s^2}\right) \quad \cdots ①$$

AM-GMから、$t^2+s^2\geq 2ts$ ∴ $1\geq\frac{2st}{t^2+s^2}$ $(\because t,s>0)$ で等号成立は$s=t$の時。

よって①から、

$$f\leq 2(1+1)=4$$

となる。

第 5 問

[解] (1) 丁度1本あたるのは、Aから引いた球の色で場合分けして、(くじを左で引くとする)

$$\frac{1}{6}\times\frac{{}_3C_1\cdot{}_7C_2}{{}_{10}C_3}+\frac{2}{6}\times\frac{{}_3C_1\cdot{}_7C_1}{{}_{10}C_2}+\frac{3}{6}\ \frac{{}_3C_1}{{}_{10}C_1}$$

$$=\frac{1}{6}\times\frac{21}{40}+\frac{2}{6}\times\frac{14}{30}+\frac{3}{6}\times\frac{3}{10}$$

$$=\frac{63+112+108}{720}=\frac{283}{720}\ //$$

(2) 排反を考える。1本もあたらないのは、

$$\frac{1}{6}\times\frac{{}_7C_3}{{}_{10}C_3}+\frac{2}{6}\times\frac{{}_7C_2}{{}_{10}C_2}+\frac{3}{6}\ \frac{{}_7C_1}{{}_{10}C_1}$$

$$=\frac{1}{6}\times\frac{7}{24}+\frac{2}{6}\times\frac{7}{15}+\frac{3}{6}\times\frac{7}{10}$$

$$=\frac{70+224+504}{1440}=\frac{798}{1440}=\frac{133}{240}$$

だから少なくとも1本あたるのは

$$1-\frac{133}{240}=\frac{107}{240}\ //$$

[解2]

(1) 10本ならべたくじを左から引くとすると、

$$\frac{1}{6}\times\frac{{}_3C_1\cdot{}_7C_2}{{}_{10}C_3}+\frac{2}{6}\times\frac{{}_2C_1\cdot{}_8C_2}{{}_{10}C_3}+\frac{3}{6}\ \frac{1\cdot{}_9C_2}{{}_{10}C_3}$$

$$=\frac{283}{6\cdot{}_{10}C_3}=\frac{283}{720}\ //$$

第 6 問

[解] $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ の両辺xで微分して

$$F'(x)=-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt+\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{x}(f(x)-F(x)) \quad \cdots ①$$

である。ここで、題意から、$0\leq t\leq x$の時$f(x)\geq f(t)$だから、同区間で積分して

$$xf(x)\geq\int_0^x f(t)dt \quad \cdots ②$$

したがって、$0<x$の時、②の両辺xでわって、

$$f(x)\geq F(x) \quad \cdots ③$$

したがって、①の右辺は0以上だから、$F'(x)\geq 0$。つまり$F(x)$は単調増加 図

次に、$y=G(x)=xF(x)$とおく。

$$G'(x)=f(x)$$

だから、$x>0$の時

$$3F(x)=f(x) \Leftrightarrow 3xF(x)=xf(x) \Leftrightarrow 3G(x)=xG'(x) \quad \cdots ④$$

である。

$$3y=x\frac{dy}{dx} \Leftrightarrow \frac{3}{x}dx=\frac{1}{y}dy$$

両辺積分して、C_0, Cを定数として、

$$3\log x+C_0=\log y$$

$$\therefore y=C\cdot x^3$$

とおける。両辺微分して、$y'=f(x)$より、

$$f(x)=3Cx^2$$

$f(1)=1$から、$C=\frac{1}{3}$となり、$f(x)=x^2$である。逆にこの時、$F(x)=\frac{1}{3}x^2$となり、

- $f(x)$は連続かつ単調増加
- $3F(x)=f(x)$
- $f(1)=1$

をみたし十分。以上から $f(x)=x^2$

[解2] (後半部)

①から $f(x)=xF'(x)+F(x)$ だから、$y=F(x)$として

$$3F(x)=f(x) \Leftrightarrow 3y=x\frac{dy}{dx}+y \Leftrightarrow \frac{1}{x}dx=\frac{1}{2y}dy$$

積分して、

$$y=C\cdot x^2$$

とおけるから、$f(1)=1$から$C=1$となって、$f(x)=x^2$である。(以下同略)