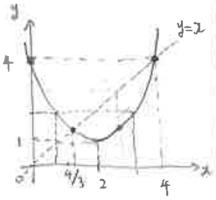
T. K. 大数学 1974

[解] $f(x)=\frac{3}{4}x^2-3x+4=\frac{3}{4}(x-2)^2+1$ とおく

$y=x$ と $y=f(x)$ の交点は $x=\frac{4}{3}, 4$ でグラフは右図。



したがって、$4<b$ の時 $f(b)>b$ で不適。次に $[a, b]$ に

2を含むかで場合分けする。

1° $a \leq 2 \leq b$ の時

$[a, b]$ での $\min f=f(2)=1$ だから、$a=1$ である。$f(1)=\frac{7}{4}$ だから $b=4$ のみ適する。

2° $a \geq 2$ の時

$[a, b]$ では $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ だから、$f(a)=a$ かつ、$f(b)=b$ となれば良いが、

図からこれをみたす (a, b) はない。

3° $b<2$ の時

$[a, b]$ では、$f(b) \leq f(x) \leq f(a)$ だから $f(b)=a$ かつ $f(a)=b$ となる。

$$f(b)-f(a)=\frac{3}{4}(b^2-a^2)-3(b-a)=(a-b)$$

$a \neq b$ から

$$\frac{3}{4}(a+b)-3=-1 \quad \therefore\ a+b=\frac{8}{3}$$

これを $f(a)=b$ に代入すると $a=b=\frac{4}{3}$ となり、$a=b$ に矛盾。

以上から、もとめるのは $(a, b)=(1, 4)$ である。

第 2 問

[解] $|\alpha|=k$ とおく。

(1) $k\neq 0,1$ とする。題意から、$x=\alpha,\alpha^2,\alpha^4,\cdots,\alpha^{2^n},\cdots$ が $f(x)=0$ の解であり、$k\neq 0,1$ から、これらは全て異なる。これは $f(x)$ が3次であることに反し矛盾。以上から、$k=0,1$ である。■

(2) $a,b,c\in\mathbb{R}$ として $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とおく。$f(x)=0$ の3解を α,β,γ とおく。

1° $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ の時

$\alpha\neq\beta,\ \beta\neq\gamma,\ \gamma\neq\alpha$ 及び (1) から、$\{\alpha,\beta,\gamma\}=\{0,\pm1\}$ となり、この時、十分である。

$$f(x)=x^3-x \quad \cdots ①$$

2° α,β,γ のうち1つのみ実数のとき

対称性から、$\alpha\in\mathbb{R}$ として良い。この時 $\gamma=\bar{\beta}$ となる (∵ $a,b,c\in\mathbb{R}$) 又、題意から、

$$\alpha=0,1$$

である。((1)及び $\alpha=-1$ ならば $\alpha^2=1$ が解になるので)

㋐ $\alpha=0$

題意から、β^2 も $f(x)=0$ の解だから、

$$\beta^2=0,\beta,\bar{\beta}$$

$\beta\neq 0,1$ より、

$$\beta^2=\bar{\beta} \quad \cdots (*)$$

ここで、$e(\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$ として、$\beta=e(\theta)$ とすると、$(0\leq\theta<2\pi)$ (*)から、(∵ (1))

$$e(2\theta)=e(-\theta)$$

$$\therefore\ 2\theta=-\theta+2n\pi \quad (n\in\mathbb{Z})$$

$$\therefore\ \theta=\frac{2}{3}n\pi$$

$0\leq\theta<2\pi$ から、$n=0,1,2$ として、

$$\theta=0,\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3}$$

このうち、$\theta=0$ は $\beta=1$ となって不適で、その他の時は十分である。この時

$$f(x)=x^3+x^2+x \quad \cdots ②$$

となる。

㋑ $\alpha=1$

㋐と同じく、

$$\beta^2=1,\beta,\bar{\beta}$$

$\beta\neq 0,1$ から、

$$\beta^2=1,\ \bar{\beta}$$

$\beta^2=\bar{\beta}$ の時、㋐と同じく、$\{\beta,\gamma\}=\{e(\frac{2}{3}\pi),\ e(\frac{4}{3}\pi)\}$ で、

$$f(x)=(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1 \quad \cdots ③$$

$\beta^2=1$ の時、$\beta=\pm1$ で、$\beta\in\mathbb{R}$ となり矛盾。

∵ $a,b,c\in\mathbb{R}$ から、以上で全ての場合がつくされた。よって①〜③より、

$$f(x)=x^3-x,\ x^3+x^2+x,\ x^3-1$$ //

第 3 問

[解] (1) $w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow w = \overline{w}$ だから $w = az^2 + bz$ を代入して

$$az^2 + bz = a\overline{z}^2 + b\overline{z}$$
$$\Leftrightarrow a(z^2 - \overline{z}^2) + b(z - \overline{z}) = 0$$
$$\Leftrightarrow \{a(z + \overline{z}) + b\}(z - \overline{z}) = 0$$
$$\Leftrightarrow z + \overline{z} = -\frac{b}{a} \text{ or } z \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \text{ or } y = 0$$
$\#$

(2) $y=0$の時 wは$f(x)=ax^2+bx$で表される。 ---①

次に $x = -\frac{b}{2a}$の時

$$az^2 + bz = a\left(-\frac{b}{2a} + iy\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a} + iy\right)$$
$$= a\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{by}{a}i - y^2\right) + byi - \frac{b^2}{2a}$$
$$= -ay^2 - \frac{b^2}{4a} \equiv g(y) \quad \text{②}$$

である。

1° $a > 0$の時

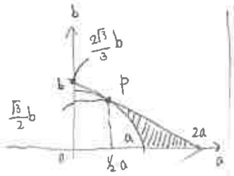
$f(x) \geqq -\frac{b^2}{4a}$, $g(y) \leqq -\frac{b^2}{4a}$ で、この間の値はくまなくとるから、wは任意の実数値をとる。

2° $a < 0$の時

$f(x) \leqq -\frac{b^2}{4a}$, $g(y) \geqq -\frac{b^2}{4a}$ で、1°と同様にwは任意の実数値をとる。

以上から示された。□

第 4 問



[解] 対称性から、立体のうち $y \geq 0$ の部分の体積 V_1、もとめる体積 V_2 として、

$$V_2 = 2V_1 \quad \cdots ①$$

である。接線は y 軸平行でないので、$m \in \mathbb{R}$ として

$$l: y = m(x-2a)$$

とおける。これが楕円と接するので、$X = \frac{x}{a}, Y = \frac{y}{b}$ とおき直した座標で、

$$bY = m(aX - 2a)$$

と $X^2+Y^2=1$ が接する。したがって

$$\frac{|2am|}{\sqrt{(am)^2+b^2}} = 1$$

各辺0以上から2乗して、

$$4a^2m^2 = a^2m^2 + b^2 \quad \therefore m = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{b}{a}$$

図の接線の傾きは負だから、$a, b > 0$ より複号負をとって、

$$l: y = -\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{b}{a}(x-2a)$$

である。この時接点 $P\left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}b\right)$ となる。したがって、

$V_1 =$  $-$  $\cdots ②$

において、

 $= \frac{1}{3}\pi(2a)^2\frac{2\sqrt{3}}{3}b - \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}a\right)^2\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}b - \frac{\sqrt{3}}{2}b\right)$

$$= \frac{1}{3}\pi\left[\frac{8\sqrt{3}}{3}a^2b - \frac{\sqrt{3}}{24}a^2b\right]$$

$$= \frac{1}{3}\pi\ \frac{63\sqrt{3}}{24}a^2b = \frac{7\sqrt{3}}{8}\pi a^2b$$

 $= \pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}b} a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy = a^2\pi\left[y - \frac{1}{3b^2}y^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}b} = \frac{3\sqrt{3}}{8}\pi a^2b$

を②に代入して

$$V_1 = \frac{7-3}{8}\sqrt{3}\pi a^2b = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^2b$$

①から

$$V_2 = \sqrt{3}\pi a^2b$$

//

[解] $f(x)=e^x-ax$ とおく。$f'(x)=e^x-a$ から、aによって増減は以下のようになる。

1° $a\leq 1$の時

$f'(x)\geq 0$ から、$f(x)$は単調増加で、$f(0)=1$, $f(1)=e-a$ だから、

$\max|f(x)|=2 \Leftrightarrow e-a=2 \Leftrightarrow a=e-2$ で、これは $a\leq 1$ をみたす。

2° $1\leq a\leq e$の時

$f'(x)=0$ なる x が $0\leq x\leq 1$ にただ1つ存在し、下表をうる。(これをαとおく)

x	0		α		1
f'		$-$	0	$+$	
f	1	↘		↗	$e-a$

($f'(\alpha)=0$ から、$e^\alpha=a$ で $1\leq a\leq e$ から $0\leq\alpha\leq 1$)

この時、$\max|f(x)|=2$ の時、$|e-a|<2$ から $f(\alpha)=-1$ であるが

$$f(\alpha)=e^\alpha-a\alpha=e^\alpha(1-\alpha)>0$$

から矛盾。

2° $e\leq a$の時

$f'(x)\leq 0$ から、$f(x)$は単調減少で、$f(0)=1$, $f(1)=e-a$ だから、$f(1)\leq 0$ とあわせて、$\max|f(x)|=2 \Leftrightarrow e-a=-2 \Leftrightarrow a=e+2$ で、これは $a\geq e$ をみたす。

以上から もとめるのは $a=e\pm 2$

第 6 問

[解] $F(a)=\int_0^{\pi/2}|\sin x-a\cos x|dx$, $s=\sin x$, $c=\cos x$, $f(x)=s-ac$ とおく。$f'(x)=c+as$

$a\leqq 0$ の時, $f(x)\geqq 0$ となり

$$F(a)=\int_0^{\pi/2}s-a\int_0^{\pi/2}c\,dx=1-a$$

これは a の単調減少関数であるから, 連続性も考えて, $0\leqq a$ で考えれば良い。この時

$f(0)=-a\leqq 0$, $f(\pi/2)=1$, $f'(x)\geqq 0$ から, $[0,\frac{\pi}{2}]$ に $f(\alpha)=0$ なる α がただ1つあって,

$$F(a)=-\int_0^{\alpha}f(x)dx+\int_{\alpha}^{\pi/2}f(x)dx$$

$$=-\int_0^{\alpha}s\,dx+\int_0^{\alpha}ac\,dx+\int_{\alpha}^{\pi/2}s\,dx-\int_{\alpha}^{\pi/2}ac\,dx \quad \cdots ①$$

とかける。

$$F'(a)=-\sin\alpha\cdot\alpha'+a\cos\alpha\cdot\alpha'+\int_0^{\alpha}c\,dx-\sin\alpha\cdot\alpha'+a\cos\alpha\cdot\alpha'-\int_{\alpha}^{\pi/2}c\,dx$$

$$=2(a\cos\alpha-\sin\alpha)\alpha'+2\sin\alpha-1$$

$$=2\sin\alpha-1 \quad (\because f(\alpha)=0)$$

から下表をうる。

a	0				$(+\infty)$
α	0	$+$	$\frac{\pi}{6}$		$(\pi/2)$
F'		$-$	0	$+$	
F		$\searrow$		$\nearrow$	

したがって, $\alpha=\frac{\pi}{6}$ で $F(a)$ は最小で, この時 $f(\alpha)=0$ より, $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$ で この時 ①から

$$F\left(\tfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\int_0^{\pi/6}\left(s-\tfrac{\sqrt{3}}{3}c\right)dx+\int_{\pi/6}^{\pi/2}\left(s-\tfrac{\sqrt{3}}{3}c\right)dx$$

$$=-\left[-c-\tfrac{\sqrt{3}}{3}s\right]_0^{\pi/6}+\left[-c-\tfrac{\sqrt{3}}{3}s\right]_{\pi/6}^{\pi/2}$$

$$=+\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{6}-1\right)-\left(\tfrac{\sqrt{3}}{3}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

$$=\sqrt{3}-1$$

となる。