T. k. 大数学 1973

第 1 問

[解] まず. $\frac{p}{q} \neq \frac{2}{3}$ ‥ ① である。このもとで考える。与式から

$$-\frac{1}{q^2} < \frac{p}{q} - \frac{2}{3} < \frac{1}{q^2} \quad \cdots ②$$

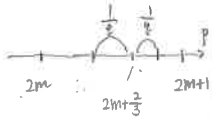
まず $q>0$ の時. ②の両辺 q をかけて、セイりする.

$$\frac{2}{3}q - \frac{1}{q} < p < \frac{2}{3}q + \frac{1}{q} \quad \cdots ③$$

$q=3m$ $(m \in \mathbb{N})$ の時 $\left|\frac{1}{q}\right| < 1$ から ③をみたす (p, q) は $(2m, 3m)$ となるが. ①からこれは不適。

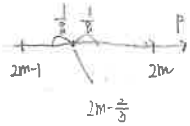
次に $q=3m+1$ $(m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ の時. $\frac{2}{3}q = 2m + \frac{2}{3}$ だから右図及び

$\frac{1}{q} = \frac{1}{3m+1}$ が単調減少であることから.



$$\begin{cases} \frac{2}{3} \leq \frac{1}{q} \Leftrightarrow m=0 \text{ の時. } p=2m, 2m+1 \\ \frac{1}{3} \leq \frac{1}{q} < \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{6} < m \leq \frac{2}{3} \text{ の時 } m \text{ がなく不適.} \\ \frac{1}{q} < \frac{1}{3} \text{ の時. ③をみたす } p \text{ はない} \end{cases}$$

最後に $q=3m-1$ $(m \in \mathbb{N})$ の時. $\frac{2}{3}q = 2m - \frac{2}{3}$ だから右図より



$$\begin{cases} \frac{2}{3} \leq \frac{1}{q} \Leftrightarrow m \leq \frac{5}{6} \text{ の時. これをみたす } m \text{ はない} \\ \frac{1}{3} \leq \frac{1}{q} < \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{5}{6} < m \leq \frac{4}{3} \text{ の時 } m=1 \text{ で } p=2m-1 \\ \frac{1}{q} < \frac{1}{3} \text{ の時. ③をみたす } p \text{ はない。} \end{cases}$$

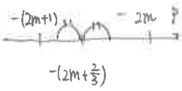
以上から. $0<q$ の時. $(p, q) = (0,1)\ (1,1)\ (2,2)$. ‥④ である。

さらに. $q<0$ の時. ②の両辺に q をかけて.

$$\frac{2}{3}q + \frac{1}{q} < p < \frac{2}{3}q - \frac{1}{q} \quad \cdots ④$$

$q=3m$ $(m \in \mathbb{Z})$ は $q>0$ の時と同様不適である。

$q=-(3m+1)$ $(m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ の時 $\frac{2}{3}q = -(2m+\frac{2}{3})$ から. 同様に絞ると.



$m=0$ の時 $p=-(2m+1)$. $-2m$

である。

$q=-(3m-1)$ $(m \in \mathbb{N})$ の時 $\frac{2}{3}q = -(2m-\frac{2}{3})$ で同様に

$m=1$ の時 $p=-2m+1$

以上から $q<0$ の時. $(p, q) = (0,-1)\ (-1,-1)\ (-1,-2)$ ‥⑤ である。

④.⑤から

$(p, q) = (0, \pm 1)\ (\pm 1, \pm 1)\ (\pm 1, \pm 2)$ (複号同順)

-4-

第 2 問

[解] 題意をみたす整式を $f(x)$ とすると、適当な整式 $Q(x), R(x)$ を用いて、

$$\begin{cases} f(x) = Q(x)\cdot x^2 + x + 1 & \cdots ① \\ f(x) = R(x)\cdot (x+1)^2 + x & \cdots ② \end{cases}$$

とかける。まず $f(x)$ が定数又は1次の時 ①,②をみたすものはないので以下2次以上を考える。①から $f(x) = \sum_{k=2}^{n} a_k x^k + x + 1$ $(a_k \in \mathbb{R}, a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}_{\geq 2})$ とおける。②から $g(x) = f(x) - x$ が $(x+1)^2$ で割り切れるので

$$g(x) = \sum_{k=2}^{n} a_k x^k + 1$$

に対し、$g(-1) = g'(-1) = 0$ であるから、

$$\begin{cases} g(-1) = \sum_{k=2}^{n} a_k (-1)^k + 1 = 0 \\ g'(-1) = \sum_{k=2}^{n} k a_k (-1)^{k-1} = 0 \end{cases} \cdots ③$$

をみたす a_k $(k=2 \cdots n)$ が存在する最小の n をもとめれば良い。

1° $n=2$

③ $\Leftrightarrow$ $a_2 + 1 = 0 \land -2a_2 = 0$ となりこれをみたす a_2 はない。

2° $n=3$

$$③ \Leftrightarrow \begin{cases} -a_3 + a_2 + 1 = 0 \\ 3a_3 - 2a_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = -3 \\ a_3 = -2 \end{cases}$$ だから、$n=3$ は適する。

この時 $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + x + 1$ となる。

以上から、もとめるのは $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + x + 1$ である。//

第 3 問

[解] $\begin{cases} 0 \leq \alpha < \pi,\ 0 < \beta < \frac{1}{2} & \cdots ① \\ 0 \leq x \leq 1,\ y \leq \cos(\pi\beta) & \cdots ② \end{cases}$

①.②から $0 < \alpha\beta < \frac{\pi}{2}$, $0 < \pi\beta < \frac{\pi}{2}$ だから. $\cos(\pi\beta) > 0$, $\sin(\pi\beta) > \sin(\alpha\beta) > 0$ となる。

ここで $A = y\sin(\alpha\beta) + x\sin\{(\pi-\alpha)\beta\}$ とおく。これは ②及び $\sin(\alpha\beta) > 0$ から.

$y = \cos(\pi\beta)$ で max B となる

$$B = \cos(\pi\beta)\sin(\alpha\beta) + x\sin\{(\pi-\alpha)\beta\}$$

$$\frac{dB}{d\alpha} = -\beta\left[\cos(\pi\beta)\cos(\alpha\beta) + x\cos\{(\pi-\alpha)\beta\}\right] \leq 0 \quad (\because ①.②)$$

から. B は α の単調減少関数で. $\alpha = 0$ で最大値 C をとる。

$$C = x\sin\pi\beta \leq \sin\pi\beta \quad (\text{等号成立は } x = 1)$$

となる。以上から. $A \leq \sin\pi\beta$ となるから、与式すなわち $\sin\pi\beta \leq A$ が成立するのは

等号成立時のみで. この時 $x = 1$ である 図

第4問

[解] $f'(x)=3x^2+p$, $g'(x)=3x^2+2ax$ である。f, gが極大値を持つので、

$f'(x)=0$, $g'(x)=0$ は各々2異実解(α, β), (γ, δ)を持つ。($\alpha<\beta$, $\gamma<\delta$) 題意の

条件及び3次係数正から、

$$f(\alpha)=g(\gamma),\ f(\beta)=g(\delta) \qquad \cdots ①$$

である。ここで $a>0$ 及び $g'(x)=x(3x+2a)$ から、

$$\gamma=-\frac{2}{3}a,\ \delta=0 \qquad \cdots ②$$

となるので ①より、

$$\begin{cases} f(\alpha)=\left(-\frac{2}{3}a\right)^3+a\left(-\frac{2}{3}a\right)^2+b=\frac{4}{27}a^3+b \\ f(\beta)=b \end{cases} \qquad \cdots ③$$

となる。ここで $p<0$ のもとで $\alpha=-\sqrt{\frac{-p}{3}}$, $\beta=\sqrt{\frac{-p}{3}}$ だから、③の辺々足し引きして

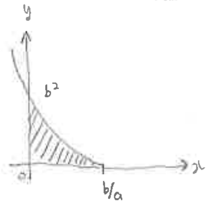
$$\begin{cases} f(\alpha)+f(\beta)=2q=\frac{4}{27}a^3+2b \\ f(\alpha)-f(\beta)=-2\sqrt{\frac{-p}{3}}\left(\frac{2}{3}p\right)=\frac{4a^3}{27} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} q=\frac{2}{27}a^3+b \\ p=-\frac{a^2}{3} \end{cases}$$

//

第 5 問

[解] x, y軸にまわして得られる立体の体積 V_X, V_Y とする。



$$V_X = \pi\int_0^{b/a}(ax-b)^4\,dx$$

$$V_Y = 2\pi\int_0^{b/a} x(ax-b)^2\,dx$$

から、

$$V_X = V_Y \Leftrightarrow \int_0^{b/a}\left\{(ax-b)^4 - 2x(ax-b)^2\right\}dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{5a}(ax-b)^5 - \frac{2}{4}a^2x^4 + \frac{4}{3}abx^3 - b^2x^2\right]_0^{b/a} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{5a}(-b)^5 - \frac{2}{4}a^2\left(\frac{b}{a}\right)^4 + \frac{4}{3}ab\left(\frac{b}{a}\right)^3 - b^2\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^5}{5a} - \frac{2}{4}\frac{b^4}{a^2} + \frac{4}{3}\frac{b^4}{a^2} - \frac{b^4}{a^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow ab\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{4}{3} - 1 = 0 \qquad (\because a, b \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow ab = \frac{5}{6} = \mathrm{const}$$ ∎

第 6 問

[解] $f(10)=100a+10b+c$, $g(10)=100c+10b+a$ で, $1\leq a,b,c\leq 6$ から.

$f(10)>452 \Leftrightarrow$ $a=5,6$ 又は $(a=4 \wedge 10b+c>52)$

$\Leftrightarrow$ $a=5,6$ 又は "$a=4 \wedge b=6$" 又は "$a=4 \wedge b=5, c\geq 3$"

$g(10)>452 \Leftrightarrow$ $c=5,6$ 又は "$c=4 \wedge b=6$" 又は "$c=4 \wedge b=5 \wedge a\geq 3$"

である。以下のように排反に場合分けする。

1° $a=5,6$ かつ $c=5,6$

2° $a=5,6$ かつ $c=4$

3° $a=4$, かつ $c=5,6$

4° $a=4$ かつ $c=4$

1°の時 常に条件がみたされ, 場合の数は $2\times6\times2=24$通り.

2°の時 $b=5,6$ なら良く, 〃 $2\times2=4$通り

3°の時, 対称性から2°と同じく 〃 4通り

4°の時. $b=5,6$ の2通り.

又全事象は 6^3通りで同様にたしからしいので

$$\frac{24+4+4+2}{6^3}=\frac{17}{108}$$

//