T. K. 大数学 1972

第 1 問

[解] $|aw+b|^2 = a^2|w|^2 + b^2 + ab(w+\overline{w}) = a^2+b^2-ab$ だから.

$$a^2+b^2-ab=1 \quad \cdots ①$$

をみたす $(a,b) \in \mathbb{Z}$ をもとめれば良い。対称性から $a \leq b$ とする.

$$a^2+b^2 = ab+1 \leq b^2+1 \quad \therefore\ a^2 \leq 1$$

だから $a=0, \pm1$ が必要で順に①に代入して.

$$(a,b)=(0,\pm1)\ (1,1)\ (1,0)\ (-1,-1)\ (-1,0)$$

である.

$b(b-a)=0$

第 2 問

[解] $e(\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$ とおく。$x=\pm1$ が虚根の時 $k=0$ で不適だから $x=e(\theta)$ $(0<\theta<\pi)$ が解だとすると、$k>0$ とから、$x=e(-\theta)$ も解である。残りの実解を α とおく。

$$\begin{cases} \alpha+e(\theta)+e(-\theta)=0 & \cdots ① \\ \alpha e(\theta)+\alpha e(-\theta)+e(\theta)e(-\theta)=-1 & \cdots ② \\ \alpha e(\theta)e(-\theta)=-k & \cdots ③ \end{cases}$$

① から $\alpha=-(e(\theta)+e(-\theta))$ だから、② から $\alpha^2=2$ $\therefore$ $\alpha=\pm\sqrt{2}$。一方 ③ から $-\alpha=k>0$ だから

$(\alpha, k)=(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ となり $x^2-x+\sqrt{2}=0$ の解をもとめて、

$$x=-\sqrt{2},\ \frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2}$$

//

第 3 問

[解] (1) ${}_{l+n}C_l = \dfrac{(l+n)!}{l!\cdot n!}$ だから

$${}_{l+n}C_l > {}_{m+n}C_m$$

$$\frac{(l+n)!}{l!} > \frac{(m+n)!}{m!}$$

$$(l+n)\cdots(l+1) > (m+n)\cdots(m+1)$$

$$\therefore\ l > m \quad /\!/$$

(2) $R(x)$は高々2次式で、$R(x)=A(x-a)^2+B(x-a)+C$ とおける。又、適当な多項式$P(x)$があって、

$$F(x)=(x-a)^3\cdot P(x)+R(x)$$

とおける。ここで、$G(x)=F(x)-R(x)$とおくと、$G(x)$は$(x-a)^3$で割り切れるから

$$G(a)=G'(a)=G''(a)=0$$

$$\therefore\ R(a)=F(a),\ R'(a)=F'(a),\ R''(a)=F''(a) \quad \cdots ①$$

であり、$R(a)=C$, $R'(a)=B$, $R''(a)=2A$ だから、①より

$$C=F(a),\ B=F'(a),\ A=\frac{1}{2}F''(a)$$

だから

$$R(x)=\frac{1}{2}F''(a)(x-a)^2+F'(a)(x-a)+F(a) \quad /\!/$$

第 4 問

[解] $f'(x)>0$ から $f(x)$ は単調増加であるから.

$$F(x)=\int_a^x\{f(x)-f(t)\}dt+\int_x^b\{f(t)-f(x)\}dt$$

$$=f(x)\int_a^x dt-\int_a^x f(t)dt+\int_x^b f(t)dt-f(x)\int_x^b dt$$

$$F'(x)=f'(x)\int_a^x dt+f(x)-f(x)-f(x)-f'(x)\int_x^b dt+f(x)$$

$$=f'(x)(2x-a-b)$$

$f'(x)>0$ から 下表を得る。

x	a		$\frac{a+b}{2}$		b
F'		$-$	0	$+$	
F		$\searrow$		$\nearrow$	

よって $x=\frac{a+b}{2}$ でminとなる。

第 5 問

[解] 接線$y=\frac{1}{e}x$である。グラフは右図

題意の体積Vとして

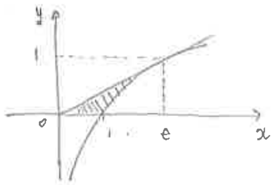
$V=$  $-$ 

$=\frac{1}{3}\pi e-\pi\int_1^e(\log x)^2dx$

$=\frac{1}{3}\pi e-\pi\left[x(\log x)^2-2x\log x+2x\right]_1^e$

$=\frac{1}{3}\pi e-\pi\left[e-2\right]$

$=\pi\left(-\frac{2}{3}e+2\right)$



第 6 問

[解]

(1) $a_n = a + d(n-1)$ だから, $A_n = \sum_{k=1}^{n} e^{a_k}$ として

$$A_n = e^{a} \sum_{k=1}^{n} (e^{d})^{n-1}$$

だから 収束条件は $-1 < e^{d} \leq 1 \Leftrightarrow d \leq 0$ //

(2) $A = \int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt$ として, $f(x) = x + A$ だから

$$A = \int_0^{\pi} (x+A)\sin x\,dx$$

$$= \Big[-(x+A)\cos x + \sin x\Big]_0^{\pi} = -(\pi + A)(-1) + A = \pi + 2A$$

$\therefore A = -\pi$

だから $f(x) = x - \pi$ //