T. K 数学 1971

80分

第 1 問

[解] 格子点 $P_t(t, 1-2t)$ $(t \in \mathbb{Z})$ とおく. 又 $A = \sum_{k=-10}^{10} f(k, tk+1-2t)$ とおく。

$$f(k, tk+1-2t) = f(k, t(k-2)+1)$$

$t \to \infty$ の時 $k \neq 2$ に対して $|t(k-2)+1| \to \infty$ となるから $f(k, t(k-2)+1) = 0$ となる. したがって

$$\lim_{t \to \infty} A = f(2, 1)$$ 答

[解] $T=\int_0^a P(x)P'(x)\,dx$, $S=\int_0^a \{P'(x)\}^2 dx$ とおく.

$P(x)=Ax+Bx^2$ だから. $P'(x)=A+2Bx$ で.

$$T=\left[\frac{1}{2}\{P(x)\}^2\right]_0^a=\frac{1}{2}P(a)^2 \quad \cdots ①$$

$$S=\int_0^a (4B^2x^2+4ABx+A^2)\,dx$$

$$=\left[\frac{4}{3}B^2x^3+2ABx^2+A^2x\right]_0^a$$

$$=\frac{4}{3}B^2a^3+2ABa^2+A^2a \quad \cdots ②$$

したがって. 以下任意の $A,B\in\mathbb{R}$ に対して $T\leq kS$ が成り立つ k の条件をかんがえれば良い. ①②から.

$$T\leq kS$$

$$\frac{1}{2}(Aa+Ba^2)^2\leq k\left(\frac{4}{3}B^2a^3+2ABa^2+A^2a\right)$$

$a>0$ から 両辺 a でわって.

$$\frac{1}{2}a(A^2+2aAB+a^2B^2)\leq k\left(A^2+2aBA+\frac{4}{3}a^2B^2\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}a-k\right)A^2+(a^2B-2kaB)A+\frac{1}{2}a^3B^2-\frac{4}{3}ka^2B^2\leq 0 \quad \cdots ☆$$

これが任意の A で成り立つには, $\frac{1}{2}a-k\leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}a\leq k \cdots ③$ が必要。等号不成立の時.

左辺 $f(A)$ として. $f(A)=0$ の判別式が0以下であることが必要。

$$(a^2B-2kaB)^2-4\left(\frac{1}{2}a-k\right)a^2B^2\left(\frac{1}{2}a-\frac{4}{3}k\right)\leq 0$$

$a>0$ から. 両辺 a^2 でわって.

$$\left[(a-2k)^2-4\left(\frac{1}{2}a-k\right)\left(\frac{1}{2}a-\frac{4}{3}k\right)\right]B^2\leq 0$$

これが任意の $B\in\mathbb{R}$ で成立すれば良いので. 〜〜 ≤ 0 ならば十分.

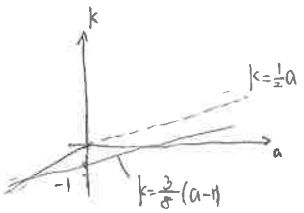
$$a-2k-4\left(\frac{1}{2}a-k\right)\left(\frac{1}{2}a-\frac{4}{3}k\right)\leq 0$$

$$(a-2k)\left[1-\left(a-\frac{8}{3}k\right)\right]\leq 0$$

③から. $a-2k<0$ だから.

$$1-\left(a-\frac{8}{3}k\right)\geq 0$$

$$k\geq\frac{3}{8}(a-1)$$



右の図からこの時の k の条件は

$$\frac{1}{2}a<k \quad \cdots ④$$

一方. ③で等号が成立する時.

$$f(A)=a^2B^2\left(\frac{1}{2}a-\frac{4}{3}k\right)=-\frac{1}{6}a^3B^2\leq 0$$

($\because a>0$; $B\in\mathbb{R}$) だから 任意の $A,B\in\mathbb{R}$ に対して☆は成り立つ。

以上から $\min k=\frac{1}{2}a$

第 3 問

[解] $h(x)=f(x)-g(x)$ とおくと、$h(x)$ は3次以下の関数で、

$$\begin{cases} h(0)=h(2)=h(3) & \cdots ① \\ h'''(x)=6 & \cdots ② \end{cases}$$

②から、$h(x)$ は3次関数で（2次以下なら $h'''(x)=0$ となる）、これと①及び因数定理から、$h(x)=0$ は $x=0,2,3$ を解に持ち、$h(x)=0$ は3次方程式ゆえ、高々3つの解しか持たないこととあわせて、

$$h(x)=Ax(x-2)(x-3)$$

と表せる。ここで $A\in\mathbb{R}\neq 0$。この時、$h'''(x)=6A$ だから、②に代入して $A=1$、よって

$$h(x)=x(x-2)(x-3) \qquad \cdots ★$$

ここで $P=\int_1^3 f(x)dx$, $Q=\int_1^3 g(x)dx$ とおく。

$$P-Q=\int_1^3 h(x)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+3x^2\right]_1^3=\frac{2}{3} \qquad \cdots ③$$

のもとで、

$$F(\theta)=Pc^2+Qs^2 \qquad (c=\cos\theta,\ s=\sin\theta)$$

の $0\leq\theta\leq 2\pi$ での max をとる θ をもとめれば良い。③から $Q=P-\frac{2}{3}$ だから

$$F(\theta)=P(1-s^2)+\left(P-\frac{2}{3}\right)s^2$$
$$=-\frac{2}{3}s^2+P$$

$0\leq s\leq 1$ より、これは $\theta=0,\pi,2\pi$ で最大である
//

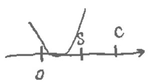
第 4 問

[解] $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ …① 以下 $C=\cos\theta$, $S=\sin\theta$ と書く.

(1) $\begin{cases} 0\leq x\leq C \\ 0\leq y\leq S \end{cases}$ …②

のもとで $Q(u,v)$ $(u=x+y,\ v=xy)$ のキセキをもとめる。対称性から、まず、$0\leq\theta\leq\pi/4$ でかんがえる。u,v は t の2次方程式 $t^2-ut+v=0$ の②をみたす2実解である。$f(t)=t^2-ut+v$ とおく。$0<\theta\leq\pi/4$ より $C\geq S$ だから.

以下のいずれかである。



1° $0\leq t\leq S$ に2実解

2° $0\leq t\leq S$, $S\leq t\leq C$ に1つずつ

1°の時

$f(t)=0$ の判別式 D とする.

$$\begin{cases} D\geq 0 \\ f(0),\ f(S)\geq 0 \\ 0\leq \frac{u}{2}\leq S \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} u^2-4v\geq 0 \\ 0\leq u\leq 2S \\ v\geq 0 \\ S^2-uS+v\geq 0 \end{cases}$$

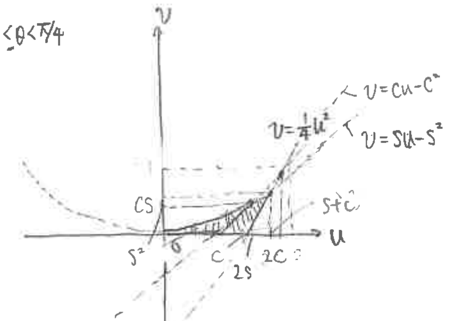
2°の時

$f(0)\geq 0,\ f(S)\leq 0,\ f(C)\geq 0$

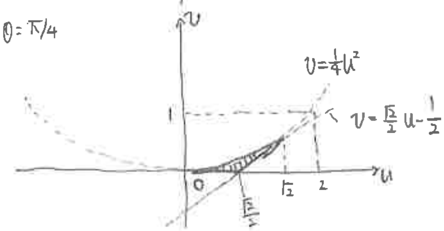
$$\iff \begin{cases} v\geq 0 \\ S^2-uS+v\leq 0 \\ C^2-uC+v\geq 0 \end{cases}$$

$\frac{\pi}{4}\leq\theta<\pi/2$ の時, C と S を入れかえれば良いから, これらを図示して下図斜線部(境界含む)

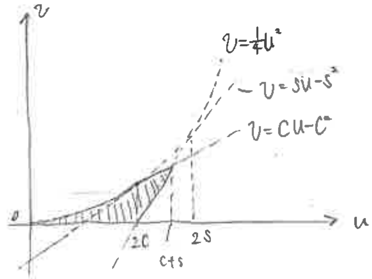
1° $0\leq\theta<\pi/4$



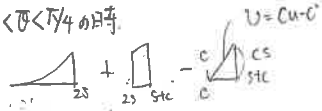
2° $\theta=\pi/4$



3° $\frac{\pi}{4}<\theta\leq\pi/2$



この面積は, $0<\theta<\pi/4$ の時

$S(\theta)=$ 

$$=\int_0^{2S}\frac{1}{4}u^2du+\frac{1}{2}(C-S)(S^2+CS)-\frac{1}{2}CS^2$$

$$=\frac{2}{3}S^3+\frac{1}{2}S(C^2-S^2)-\frac{1}{2}CS^2$$

$\pi/4<\theta<\pi/2$ の時, S と C を入れかえれば良く, $\theta=\pi/4$ の時.

$$S(\theta)=\int_0^{\sqrt{2}}\frac{1}{4}u^2du-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{24}$$

で, これは $0<\theta<\pi/4$ の時の表わしに $\theta=\pi/4$ を代入したものにひとしい

$$S(\theta)=\begin{cases} \frac{1}{6}S^3+\frac{1}{2}SC^2-\frac{1}{2}CS^2 & (0<\theta\leq\pi/4) \\ \frac{1}{6}C^3+\frac{1}{2}S^2C-\frac{1}{2}SC^2 & (\pi/4<\theta\leq\pi/2) \end{cases}$$ //

(2) $0<\theta\leq\pi/4$ とする

$$S(\pi/2-\theta)=\frac{1}{6}S^3+\frac{1}{2}C^2S-\frac{1}{2}CS^2=S(\theta)$$

だから示された 図

[解] (1) $f(x)=e^{-x}+x-1$ とおくと、$x>0$ で $f(x)>0$ を示せば良い。

$f'(x)=-e^{-x}+1>0$ $(\because x>0)$ だから、$0<x$ で $f(x)$ は単調増加で

$$f(x)>f(0)=0$$ 図

(2) $A_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}\right)$ とおく。$1-\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}\geqq 1-\frac{1}{1+\sqrt{2}}>1-1=0$ 及び

$$1-\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=1-\sqrt{k+1}+\sqrt{k}=$$

から、($A_n>0$ だから)、$P_k=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$ とおくと

$$\log A_n=\sum_{k=1}^{n}\log(1-P_k)\equiv B_n \quad \cdots ①$$

(1)から、$0<x<1$ の時、自然対数をとって

$$-x>\log(1-x)$$

$0<P_k<1$ だから、$x=P_k$ として

$$-P_k>\log(1-P_k)$$

k について足して

$$-\sum_{k=1}^{n}P_k>B_n$$

$$1-\sqrt{n+1}>B_n \quad \cdots ②$$

①、②から

$$1-\sqrt{n+1}>\log A_n$$

$n\to\infty$ の時、$1-\sqrt{n+1}\to-\infty$ だから、追い出しの原理より

$$\log A_n\to-\infty$$

$y=\log x$ は連続で

$$A_n\to+0$$

第 6 問

[解] $0<\alpha,\beta<1$ …①

(1) $p_{n+1}=\alpha p_n+(1-\beta)(1-p_n)$ //

(2) (1)から

$$p_{n+1}=(\alpha+\beta-1)p_n+(1-\beta)$$

$t=\dfrac{1-\beta}{2-(\alpha+\beta)}$ とすると

$$p_{n+1}-t=(\alpha+\beta-1)(p_n-t)$$

等比数列の公式から

$$p_n=(\alpha+\beta-1)^{n-1}(p_1-t)+t$$

$-1<\alpha+\beta-1<1$ (∵①) から

$$p_n\to t=\frac{1-\beta}{2-(\alpha+\beta)}$$ //