T. K. 大数学 1970

第 1 問

[解] (1) $\alpha=0, t=2$ の時 $\min = 1$ //

(2) $f(t)=(p^2+1)t^2-4t+p^2+5$, $g(t)=t^2-2qt+q^2+\sqrt{3}$ とおく。$(f(t))^2+(g(t))^2=4$ だから、

(1) から $1 \leq f(t)$、又 $g(t) \geqq (t-q)^2+\sqrt{3} \geqq \sqrt{3}$ だから、

$$4 \leq 1+3 = 4$$

となり、等号が成立。(1) から $p=0$, $t=2$ で、又 $q=t=2$ である。よって

$$(p, q)=(0, 2)$$ //

[解]

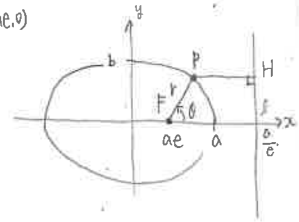
(1) 準線のうち $x>0$ のものを l とする。$F(ae,0)$ とおく時、この楕円の離心率は e であり、右のように P, H を定めると、

$$\overline{PF} = e\,\overline{PH}$$

だから、$\overline{PF} = r$ として、

$$\frac{a}{e} - ae = r\cos\theta + \frac{r}{e}$$

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$



(2) P, Q に対応する θ を $\alpha, \alpha+\pi$ $(0 \leq \alpha \leq \pi)$, R, S に対応する θ を $\alpha-\frac{\pi}{2}, \alpha+\frac{\pi}{2}$ とする。$A = a(1-e^2)$ とすると、

∘ $\overline{PF}\cdot\overline{QF} = r(\alpha)\cdot r(\alpha+\pi)$

$$= \frac{A}{1+e\cos\alpha}\cdot\frac{A}{1-e\cos\alpha} = \frac{A^2}{1-e^2\cos^2\alpha}$$

∘ $\overline{FR}\cdot\overline{FS} = r(\alpha+\pi/2)\,r(\alpha-\pi/2) = \dfrac{A^2}{1-e^2\sin^2\alpha}$

だから

$$\frac{1}{\overline{PF}\cdot\overline{QF}} + \frac{1}{\overline{FR}\cdot\overline{FS}} = \frac{2-e^2}{A^2} = \frac{2-e^2}{a^2(1-e^2)^2}$$

第 3 問

[解] $e(\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$ とし，S の n コの要素を，$a_k=e(\theta_k)$ $(k=1,2,\cdots,n)$ とする。さらに $a_1=1$ とする。(ii) で $(z,w)=(1,1)$ として，-1 も S の元である。そこで $a_2=-1$ とする。よって $n\geqq 2$ となる。

1° $n=2$

$S=(1,-1)$ は (i),(ii) をみたす。よって十分である。

2° $n=3$

$(z,w)=(a_3,1)$ として，

$p=a_3-2\cos\theta_3=-\cos\theta_3+i\sin\theta_3$

が S の元 $1,-1,a_3$ のいずれかに等しい。

$$\begin{cases} p=1 \Leftrightarrow \sin\theta_3=0 \wedge \cos\theta_3=-1 \Leftrightarrow a_3=-1 \\ p=-1 \Leftrightarrow a_3=1 \\ p=a_3 \Leftrightarrow a_3=\pm i \end{cases}$$

だから，$a_3\neq 1,-1$ とあわせて，$a_3=\pm i$ が必要だが，$S=\{1,-1,i\}$，$\{1,-1,-i\}$ はいずれも (ii) をみたさず不適．((ii) で $(z,w)=(i,i)$ or $(-i,-i)$ とすればわかる)

3° $n=4$

2° から，$a_3=\pm i$ が必要である。まず $a_3=i$ とする。(ii) で $(z,w)=(i,i)$ として，$-i$ も S の元である。さて，$S=(\pm 1,\pm i)$ は (i)(ii) をみたし十分で，$a_3=-i$ の時も同じく，$(z,w)=(-i,-i)$ として $S=(\pm i,\pm i)$ をうる。

以上から $S=(\pm 1)$，$(\pm 1,\pm i)$ //

第 4 問

[解] 円の半径1とする。この円に内接する正k角形の面積S_kは.

$$S_k = k\cdot\sin\frac{\pi}{k}\cos\frac{\pi}{k} = \frac{k}{2}\sin\frac{2\pi}{k}$$

だから.

$$\frac{2}{3}S_{3n} < S_n < \frac{\sqrt{3}}{2}S_{2n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\cdot\frac{3n}{2}\sin\frac{2\pi}{3n} < \frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n} < \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2n}{2}\sin\frac{2\pi}{2n}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{2\pi}{3n} < \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n} < \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{2\pi}{2n} \quad \cdots ①$$

$t=\sin\frac{2\pi}{3n}$とおく。①の左側から

$$t < \frac{1}{2}(3t-4t^3)$$

$t>0$から.

$$2 < 3-4t^2 \quad \therefore\ 0<t<\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6} \quad \cdots ②$$

①の右側から

$$2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n} < \sqrt{3}\sin\frac{\pi}{n}$$

$\sin\frac{\pi}{n}>0$から

$$\cos\frac{\pi}{n} < \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cdots ③$$

②,③をみたすのは.

$$\frac{2\pi}{3n}<\frac{\pi}{6} \wedge \frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{n}$$

$$\Leftrightarrow 4<n<6 \quad (\because n\in\mathbb{N})$$

$$\Leftrightarrow n=5$$

の時である。

$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n}<\frac{1}{6}$

$4<n<$

第 5 問

[解] (1) 帰納的に示す. $n=1$ の時は成立するので以下 $n=k\in\mathbb{N}$ での成立を仮定する.

$$|\sin(k+1)\theta| \leqq |\sin k\theta||\cos\theta| + |\cos k\theta||\sin\theta| \leqq k\sin\theta + \sin\theta = (k+1)\sin\theta$$

から $n=k+1$ でも成立。よって示された ■

(2) $\begin{cases} 0 \leq f(\theta) & \cdots ① \\ \int_0^{\pi} f(\theta)\sin\theta\, d\theta = 1 & \cdots ② \end{cases}$

(1)及び①から, $0\leq\theta\leq\pi$ の時

$$f(\theta)\sin n\theta \leq f(\theta)|\sin n\theta| \leq n f(\theta)\sin\theta$$

だから同区間で積分して,②から,

$$\int_0^{\pi} f(\theta)\sin n\theta\, d\theta \leq n$$ ■

第 6 問

[解] (1) $y=e^{mx}$ の時, $y'=my$ だから,

$$3y'-2y=0 \Leftrightarrow (3m-2)y=0 \Leftrightarrow m=\frac{2}{3} \quad (\because y\neq 0)$$

(2) $y=e^{\frac{2}{3}x}\cdot u(x)$ の時, $y'=e^{\frac{2}{3}x}\left(u'(x)+\frac{2}{3}u(x)\right)$ だから, ①に代入して

$$3e^{\frac{2}{3}x}\left(u'(x)+\frac{2}{3}u(x)\right)-2e^{\frac{2}{3}x}\cdot u(x)=e^{x}$$

$$3u'(x)=e^{\frac{1}{3}x}$$

両辺積分して

$$u(x)=e^{\frac{1}{3}x}+C$$

(3) (2)で $y=e^{x}+C\cdot e^{\frac{2}{3}x}$ で, $x=0$ で $y=10$ となるようにして.

$$10=1+C \quad \therefore\ C=9$$

だから, $y=e^{x}+9e^{\frac{2}{3}x}$