T. K. 大数学 1969

第 1 問

[解] $\begin{cases} a^2-b^2-c^2>0 & \cdots ① \\ ap<0,\ x>0 & \cdots ② \\ ax+by+cz=p & \cdots ③ \end{cases}$

yz平面で③の表す直線をかんがえる。まず,$(b,c)=(0,0)$とすると,$ax=p$となるが,これは②に反する よって$(b,c)\neq(0,0)$である。このもとで:

$$\min(y^2+z^2)=\left(\frac{|p-ax|}{\sqrt{b^2+c^2}}\right)^2=\frac{(p-ax)^2}{b^2+c^2}$$

だから,

$$x^2-(y^2+z^2)\leq x^2-\frac{(p-ax)^2}{b^2+c^2}<x^2-\frac{(p-ax)^2}{a^2}\quad(\because ①)$$

$$=+2\frac{p}{a}x-\left(\frac{p}{a}\right)^2=\left(\frac{p}{a}\right)\left(2x-\frac{p}{a}\right)<0\quad\left(\because ②から,\ \frac{p}{a}<0,\ x>0\right)$$

となり,

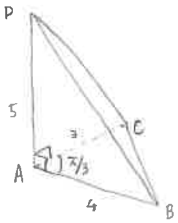
$$x^2-y^2-z^2<0_{\#}$$

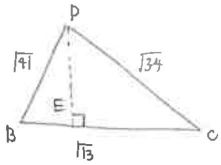
である。

[解] △BCDは右下図

○余弦定理から $\overline{BC}^2 = 16+9-2\cdot4\cdot3\cdot\frac{1}{2} = 13$

○ $\overline{BD} = \sqrt{41}$, $\overline{CP} = \sqrt{34}$





BE=xとおく.(xは符号付き. EがBC上の時正)

$$\overline{DE}^2 = 41-x^2 = 34-(\sqrt{13}-x)^2 \quad \cdots ①$$

で:

$$41-x^2 = -x^2+2\sqrt{13}x+21$$

∴ $x = \frac{10}{\sqrt{13}}$

だから①より

$$\overline{DE}^2 = 41-x^2 = \frac{433}{13}$$

∴ $\overline{DE} = \sqrt{\frac{433}{13}}$ (>0)

// (1)

(2) △BCDの面積は $S = \frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{DE} = \frac{1}{2}\sqrt{433}$ だから ABCDの体積を2通りで表して.

$$\frac{\sqrt{433}}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\overline{AF} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot3\cdot4\cdot5\sin\frac{\pi}{3}$$

∴ $\overline{AF} = 30\sqrt{\frac{3}{433}}$

//

[解] $\alpha=x+y$, $\beta=xy$ とすると、存在条件(xとyの)から $\alpha^2-4\beta\geqq 0$ …① である。

$$u=\alpha+1,\quad v=1-2\beta \qquad \cdots②$$

であり、$x^2+y^2=a^2$ から、

$$\alpha^2-2\beta=a^2 \qquad \cdots③$$

② から $\alpha=u-1$, $\beta=\frac{1}{2}(1-v)$ だから、①、③に代入して

$$\begin{cases}(u-1)^2-2(1-v)\geqq 0\\ (u-1)^2-(1-v)=a^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}v\geqq \frac{1}{2}(-u^2+2u+1)\\ v=-u^2+2u+a^2\end{cases}$$

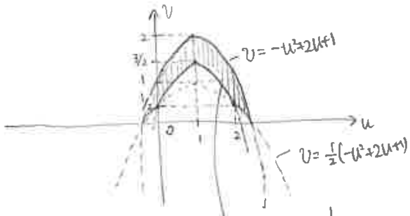
// (1)

(2) $\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq a\leqq 1$ の時、$\frac{1}{2}\leqq a^2\leqq 1$ だから、(1) から

$$\begin{cases}-u^2+2u+\frac{1}{2}\leqq v\leqq -u^2+2u+1\\ v\geqq \frac{1}{2}(-u^2+2u+1)\end{cases}$$

//

図示して下図斜線部



//

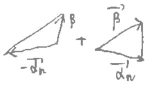
第 4 問

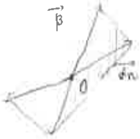
[解] $3a_n > 2a_{n-1}$ …①

与式から

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

である。$\vec{\alpha_n} = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$, $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とおくと、$|x| + |y| \leq 1$ から、(X, Y) は、右下図斜線部内をうごく（①に注意した）この面積 S は、

$\frac{1}{2}S =$ 



$$= \frac{1}{2}\left|-3a_n + 2a_{n-1}\right| + \frac{1}{2}\left|3a_n - 2a_{n-1}\right|$$

$$= \left|3a_n - 2a_{n-1}\right|$$

$$= 3a_n - 2a_{n-1} \quad (\because ①)$$

と表せる。$S = 2$ だから、

$$1 = 3a_n - 2a_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

$$\therefore a_{n+1} - 1 = \frac{2}{3}(a_n - 1) \quad (n \geq 1)$$

くり返し用いて、

$$a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}(a_1 - 1) + 1$$

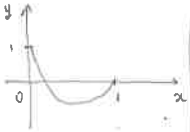
$$\longrightarrow 1 \quad (n \to +\infty)$$

第 5 問

[解] $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k - x$ とおく. $f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} - 1$ であり, $f(0) = a_0 > 0$,

$f(1) = 0$ $\left(\because \sum_{k=0}^{n} a_k = 1\right)$; 又 $a_k \geq 0$ から $f'(x)$ は $0 \leq x \leq 1$ で単調増加で,グラフの概形

は右のようになる.



1° 十分性

$f(x) = 0$ が, $0 < x < 1$ に唯1つの実根 α を持つとする。平均値の定理から

$$\frac{f(1) - f(\alpha)}{1 - \alpha} = f'(c) \quad (\alpha < c < 1)$$

$$\therefore \quad 0 = f'(c)$$

なるcがある. $f''(x) \geq 0$ から

$$0 < f'(1) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k - 1 \quad \therefore 1 < \sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k$$ □

2° 必要性

$\sum_{k=1}^{n} k a_k - 1 > 0$ ∴ $f'(1) > 0$ の時. 1より小さく1に十分近い α に対して, $f(\alpha) < 0$ となる

$(\because f''(x) \geq 0)$ から. $f(x)$ の連続性および単調性から. $0 < x < 1$ にぴったり実解を持つ □

以上から示された □

[解] $t=\frac{x}{y}$ とおくと $0<t<1$ …① である。$x^2e^{\frac{y}{x}}>0$, $y^2e^{\frac{x}{y}}>0$ に注意する。

$$f(t)=\frac{x^2e^{\frac{y}{x}}}{y^2e^{\frac{x}{y}}}=t^2\cdot e^{\frac{1}{t}-t}$$

$$\begin{aligned} f'(t) &= e^{\frac{1}{t}-t}\left(t^2\left(-1-\frac{1}{t^2}\right)+2t\right) \\ &= e^{\frac{1}{t}-t}\left(-t^2+2t-1\right) \\ &= -e^{\frac{1}{t}-t}(t-1)^2<0 \end{aligned}$$

から、$0<t\leqq1$ で $f(t)$ は単調減少。これと $f(1)=1$ から $f(x)>1$ なので

$$x^2e^{y/x}>y^2e^{x/y}$$

である。