T. K. 大数学 1968

第 1 問

[解] $\begin{cases} ab+1 \leq abc \leq bc+ca+ab+1 & \cdots ① \\ a>b>c & \cdots ② \end{cases}$

①の両辺をabcでわって

$$\frac{1}{c}+\frac{1}{abc} \leq 1 \leq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{abc} \quad \cdots ③$$

$T=\frac{1}{abc}$とおく. まず. $c=1$は③の左側が成立せず不適だから. $c \geq 2$である。③の右側から

$$1<\frac{3}{c}+\frac{1}{c^3} \qquad \therefore\ c^3-3c^2-1<0 \quad (\because c>0) \quad \cdots ④$$

$f(x)=x^3-3x^2-1$とおく。$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$より下表をうる。

x	0		2		3		4
f'	0	−	0	+	+	+	
f	−1	↘	−5		−1		15

したがって $y=f(x)$のグラフは右上で. ④には $c=1, 2, 3$が必要。一方 $c \geq 2$だったから. $c=2, 3$である。

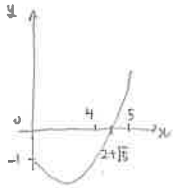
1° $c=2$

②.③に代入

$$\begin{cases} \frac{1}{2ab} \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{2ab} \\ 3 \leq b<a \end{cases} \quad \cdots ⑤$$

再び右側から

$$\frac{1}{2}<\frac{2}{b}+\frac{1}{2b^2} \qquad \therefore\ b^2-4b-1<0$$



$y=x^2-4x-1$のグラフから $b=3, 4$である。

㋐ $b=4$

⑤から.

$$\frac{1}{8a} \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{4}+\frac{1}{a}+\frac{1}{8a}=\frac{1}{4}+\frac{9}{8a}$$

$$\therefore\ \frac{1}{4} \leq a \leq \frac{9}{2}$$

だが. $5<a$とあわせて不適.

㋑ $b=3$

⑤から

$$\frac{1}{6a} \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{3}+\frac{1}{a}+\frac{1}{6a}=\frac{1}{3}+\frac{7}{6a}$$

$$\therefore\ \frac{1}{3} \leq a \leq 7$$

$4 \leq a$とあわせて. $a=4, 5, 6, 7$

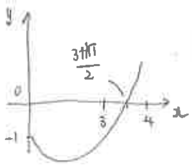
2° $c=3$

②.③に代入

$$\begin{cases} \frac{1}{3ab} \leq \frac{2}{3} \leq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{3ab} \\ 4 \leq b<a \end{cases} \quad \cdots ⑥$$

右側から.

$$\frac{2}{3}<\frac{2}{b}+\frac{1}{3b^2} \qquad \therefore\ 2b^2-6b-1<0$$



$y=2x^2-6x-1$のグラフから. これと⑥をみたすbはなく. 不適.

以上まとめて.

$(a, b, c)=(4, 3, 2)\ (5, 3, 2)\ (6, 3, 2)\ (7, 3, 2)$ //

第 2 問

[解] $x^2+bx+b^2=\left(x+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2>0$ だから 与式の両辺に x^2+bx+b^2 をかけて整理する。

$$2x^2+(3b+a)x+(3b^2-a^2)\geqq 0$$

かつ

$$2x^2-(3a+b)x+(3a^2-b^2)\geqq 0$$

だから 判別式をかんがえて

$$\begin{cases}(3b+a)^2-4\cdot 2(3b^2-a^2)\leqq 0\\(3a+b)^2-4\cdot 2(3a^2-b^2)\leqq 0\end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases}9a^2+6ab-15b^2\leqq 0\\-15a^2+6ab+9b^2\leqq 0\end{cases} \quad \cdots ①$$

$t=\frac{a}{b}$ とおく. $b\neq 0$ から ①の両辺 b^2 でわって

$$\begin{cases}9t^2+6t-15\leqq 0\\-15t^2+6t+9\leqq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-\frac{5}{3}\leqq t\leqq 1\\t\leqq -\frac{3}{5},\ 1\leqq t\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{5}{3}\leqq t\leqq -\frac{3}{5} \text{ or } t=1$$

第 3 問

[解] $e(\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$ とする。$z=e(\alpha)$, $w=e(\beta)$ であり、

$$e(\alpha)+e(\beta)=(\cos\alpha+\cos\beta)+i(\sin\alpha+\sin\beta)$$
$$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\,e\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

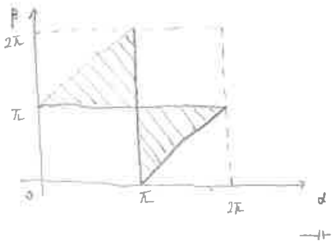
だから、$t=z+w$ として、

$$|1+z+w|\leq 1 \Leftrightarrow |t+1|^2\leq 1 \Leftrightarrow |t|^2+t+\bar{t}\leq 0 \qquad \cdots ①$$

に代入して、$|e(\theta)|=1$ より、

$$4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}+2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot 2\,\mathrm{Re}(t)\leq 0$$
$$\Leftrightarrow \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\leq 0$$
$$\Leftrightarrow \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\leq 0 \qquad \cdots ②$$

以上から、もとめる (α,β) は ① をみたしかつ $0\leq\alpha,\beta\leq 2\pi$ なる (α,β) であり、図示して下図斜線部（境界含む）



$$\left(\begin{array}{ll}
0\leq\alpha\leq\pi \land 0\leq\beta\leq\pi \text{ の時} & ② \Leftrightarrow \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\leq 0 \\
0\leq\alpha\leq\pi \land \pi\leq\beta\leq 2\pi \text{ 〃} & ② \Leftrightarrow \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\geq 0 \\
\pi\leq\alpha\leq 2\pi \land 0\leq\beta\leq\pi \text{ 〃} & ② \Leftrightarrow \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\geq 0 \\
\pi\leq\alpha\leq 2\pi \land \pi\leq\beta\leq 2\pi \text{ 〃} & ② \Leftrightarrow \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\leq 0
\end{array}\right)$$

第 4 問

[解] 直線PQをlとする。$C=\cos\theta$, $S=\sin\theta$とする,

$$l: (S^2+C^2)(x-C^2)+(S^2-C^2)(y-C^2)=0$$

$$x-C^2+(S^2-C^2)y-C^2(S^2-C^2)=0$$

$t=C^2$とする.

$$x-t+(1-2t)y-t(1-2t)=0$$

(X, Y)をlが通る時,

$$X-t+Y(1-2t)+t(2t-1)=0 \quad \cdots ①$$

が $0\leq t\leq 1$ に解を持つ。①の左辺 $f(t)$ とする.

$$f(t)=2t^2+(-2-2Y)t+X+Y$$

である。

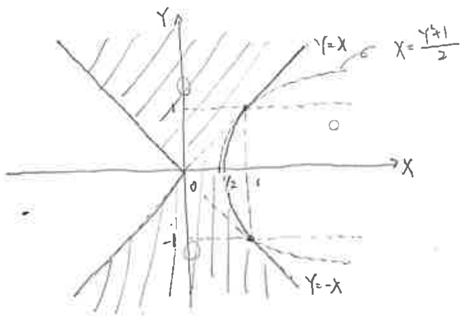
1° [0.1]に1つだけ

$$f(0)f(1)\leq 0 \Leftrightarrow (X+Y)(X-Y)\leq 0$$

2° [0.1]に2つ(重解含む)

$$\begin{cases} 判: (-1-Y)^2-2(X+Y)\geq 0 \\ 端: f(0)\geq 0,\ f(1)\geq 0 \\ 軸: 0\leq \dfrac{1+Y}{2}\leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y^2+1-2X\geq 0 \\ X+Y\geq 0 \\ X-Y\geq 0 \\ -1\leq Y\leq 1 \end{cases}$$

したがって, 1° or 2°の和集合がもとめる領域で, 図示して下図非斜線部(境界含まず)



第 5 問

[解] ${}_{2n}P_n = \dfrac{(2n)!}{n!}$ だから．$a_n = \sqrt[n]{{}_{2n}P_n}$ とすると．$a_n > 0$ で

$$\log a_n = \frac{1}{n}\log {}_{2n}P_n$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\log k$$

だから．

$$\log\left(\frac{1}{n}a_n\right) = -\log n + \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\log k$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\log\frac{k}{n}$$
$$\xrightarrow{n\to\infty} \int_1^2 \log x\,dx = \left[x(\log x - 1)\right]_1^2 = 2(\log 2 - 1) - 1(-1)$$
$$= 2\log 2 - 1 = \log\frac{4}{e}$$

となり．$\log x$ の連続性から．

$$\frac{1}{n}a_n \longrightarrow \underline{\underline{4/e}} \quad (n\to+\infty)$$

第 6 問

[解] $0 \le x \le \pi/2$ では. $0 \le \sin x \le x$, $\cos x \ge 0$ だから x をえらぶよりも $\sin x$ をえらんだ方がより積は小さくなるので: $\sin x = S$, $\cos x = C$ として.

$$f(x) = S^t \cdot C^{4-t} \quad (t=0,1,2,3,4)$$

の場合をかんがえれば良い。また対称性から $t=0,1,2$ のみしらべれば良い。$F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ とする。

1° $t=0$

$$F = \int_0^{\pi/2} S^4 dx = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} (\cos^2 2x - 2\cos 2x + 1)\,dx \quad \cdots ①$$

である。

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 2x\,dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\left[\sin 2x\right]_0^{\pi/2} = 0$$

$$\int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$$

を①に代入して

$$F = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{16}$$

2° $t=1$

$$F = \int_0^{\pi/2} S^3 \cdot C\,dx = \left[\frac{1}{4}S^4\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4}$$

3° $t=2$

$$F = \int_0^{\pi/2} S^2 C^2 dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} (\sin 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{16}$$

$3.14 < \pi < 3.15$ から. このうちもっとも小さいのは $\frac{\pi}{16}$ である。