T.K.大数学 1967

第 1 問

[解] 対称性から まず $0 \leq x \leq \pi/2$ …① でかんがえる。この時.

$$\sin^n x + \cos^n x = 1$$

$n \geq 3$ の時

$$\sin^2 x \cdot \sin^{n-2} x + \cos^2 x \cdot \cos^{n-2} x = 1 \quad \cdots ②$$

$\sin x \neq 1, \cos x \neq 1$ の時. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ とあわせて. ② をみたす x はないので. $x = 0$ or $\pi/2$ である。対称性から $x = \frac{n\pi}{2}$ $(n \in \mathbb{Z})$ である. $n=2$ の時は x は任意である。

$n=1$ の時、

$$\sqrt{2}\sin(x + \pi/4) = 1 \qquad \sin(x+\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \therefore x = 0, \pi/2 \ (\because ①)$$

したがって. 対称性から. $x = \frac{n\pi}{2}$ $(n \in \mathbb{Z})$

以上あわせて

$$\begin{cases} n \neq 2 \text{ の時 } x = \frac{n\pi}{2} \ (n \in \mathbb{Z}) \\ n = 2 \text{ 〃 } \text{任意} \end{cases}$$

//

第 2 問

[解] 直線を $l: y=m(x-2)+1$ とおく。($m\in\mathbb{R}$, ∵ l は y 軸平行でない) この時、l とた円の交点の x 座標は

$$3x^2+2\{m(x-2)+1\}^2=6$$

$$\therefore (2m^2+3)x^2+4m(1-2m)x+4(2m^2-2m-1)=0 \quad \cdots ①$$

の実解で与えられる。①の判別式 D として、①が x について2異実解を持つ条件は、

$$D>0 \iff \{2m(1-2m)\}^2-(2m^2+3)\{2(4m^2-4m-2)\}>0$$

$$\iff -m^2+2m+1>0 \iff 1-\sqrt{2}<m<1+\sqrt{2} \quad \cdots ②$$

このもとで①の2異実解 α, β $(\alpha<\beta)$ とすると、$|PQ|$, $|PR|$ は、

$$\sqrt{1+m^2}\,|\alpha-2|, \quad \sqrt{1+m^2}\,|\beta-2|$$

で与えられるから、$I=|PQ|\cdot|PR|$ として①の左辺 $f(x)$ とすると、

$$I=(1+m^2)\left|(\alpha-2)(\beta-2)\right|$$

$$=(1+m^2)\left|\frac{f(2)}{2m^2+3}\right|$$

$$=\frac{1+m^2}{2m^2+3}\cdot 8$$

$$=4\left(1-\frac{1}{2m^2+3}\right) \quad \cdots ③$$

となる。ここで、②から、$0\leq m^2<3+2\sqrt{2}$ だから、

$$3\leq 2m^2+3<9+4\sqrt{2}$$

$$\therefore \frac{1}{9+4\sqrt{2}}<\frac{1}{2m^2+3}\leq\frac{1}{3}$$

$$\therefore \frac{9-4\sqrt{2}}{49}<\frac{1}{2m^2+3}\leq\frac{1}{3}$$

③に代入して、

$$\frac{8}{3}\leq I<\frac{16}{49}(10+\sqrt{2})$$

//

第 3 問

[解] 題意の方程式の解は $x=\frac{1}{2}\left[(C_{n+1}+C_{n-1})\pm\sqrt{(C_{n+1}+C_{n-1})^2-4C_{n+1}C_{n-1}+4C_n^2}\right]$

$=\frac{1}{2}\left[(C_{n+1}+C_{n-1})\pm\sqrt{(C_{n+1}-C_{n-1})^2+4(C_{n+1}-C_{n-1})^2}\right]=\frac{1}{2}\left[(C_{n+1}+C_{n-1})\pm\sqrt{5}(C_{n+1}-C_{n-1})\right]$ …①

である($\because C_{n+1}\geq C_{n-1}$) $p=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $q=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$とおく.

(1) $\alpha_n=pC_{n+1}+qC_{n-1}=p(C_{n+2}-C_n)+q(C_{n+1}-C_n)$

$=p(C_{n+2}-C_n)+q(C_{n+2}-2C_n)=(p+q)C_{n+2}-(p+2q)C_n$

$=C_{n+2}-\frac{3-\sqrt{5}}{2}C_n$

だから

$p\alpha_n=pC_{n+2}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}C_n=pC_{n+2}-qC_n=\alpha_{n+1}$

$\therefore \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}=p=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\beta_n=qC_{n+1}+pC_n=q(C_{n+2}-C_n)+p(C_{n+2}-2C_n)$

$=C_{n+2}-(2p+q)C_n$

だから

$q\cdot\beta_n=qC_{n+2}+pC_n=\beta_{n+1}$ $\therefore \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}=q=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

(2) $\alpha_1=pC_2+qC_0=p$, $\beta_1=qC_2+pC_0=q$ だから(1)をくり返し用いて,

$\begin{cases}\alpha_n=p^n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\\ \beta_n=q^n=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\end{cases}$

第 4 問

[解] $c=\cos x$, $s=\sin x$ とおく．又，$p=s+c$ とすると $sc=\dfrac{p^2-1}{2}$，$-\sqrt{2}\leq p\leq\sqrt{2}$ …①である．

$f(x)=3(s-c)-\cos 2x=(s-c)(s+c+3)$

$f'(x)=3(c+s)+2\sin 2x$

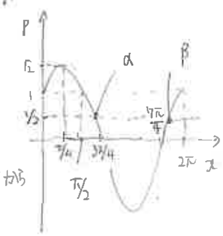
$=3(c+s)+4sc$

$=3p+2p^2-2=(2p-1)(p+2)$

から，①とあわせて下表をうる．

x	0		α		β		2π
p	1	$+$	$\frac{1}{2}$	$-$	$\frac{1}{2}$	$+$	1
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	-4	↗		↘		↗	-4

（α,β は $p=\frac{1}{2}$ となるもの．）



ここで

$s-c=\pm\sqrt{(s-c)^2}=\pm\sqrt{(s+c)^2-4sc}$

$=\pm\sqrt{2-p^2}$

及び右図から $x=\alpha$ の時 $s-c>0$，$x=\beta$ の時 $s-c<0$ だから

$$\begin{cases} f(\alpha)=\sqrt{2-p^2}\,(p+3)=\sqrt{2-\frac{1}{4}}\,\frac{7}{2}=\frac{7}{4}\sqrt{7} \\ f(\beta)=-\sqrt{2-p^2}\,(p+3)=-\sqrt{2-\frac{1}{4}}\,\frac{7}{2}=-\frac{7}{4}\sqrt{7} \end{cases}$$

となり，$-4>-\frac{7}{4}\sqrt{7}$ とあわせて

max… $\frac{7}{4}\sqrt{7}$，min $-\frac{7}{4}\sqrt{7}$

☆

第 5 問

[解] $\sin\alpha x \sin\beta x = -\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)x - \cos(\alpha-\beta)x\right)$ であり, $\alpha+\beta \neq 0$, $\alpha-\beta \neq 0$ から,

$$\int_0^1 \sin\alpha x \cdot \sin\beta x = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha+\beta}\sin(\alpha+\beta)x - \frac{1}{\alpha-\beta}\sin(\alpha-\beta)x\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha+\beta}\sin(\alpha+\beta) - \frac{1}{\alpha-\beta}\sin(\alpha-\beta)\right) \quad \cdots ①$$

ここで $\tan x = 2x$ の時 $\cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$, $\sin x = \pm\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}$ $(\because x>0)$

であり, $x>0$ から $\tan x>0$, つまり $\sin x$, $\cos x$ の符号は一致するから

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{(1+4\alpha^2)(1+4\beta^2)}}$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha = \frac{B}{\sqrt{(1+4\alpha^2)(1+4\beta^2)}}$$

ただし A, B は $\sin\alpha$, などの複号において

$(A, B) = (2\alpha+2\beta, 2\alpha-2\beta)$

$\qquad (-2\alpha-2\beta, -2\alpha+2\beta)$

をとる①に代入して

$$(\text{与式}) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(1+4\alpha^2)(1+4\beta^2)}}\left\{\frac{A}{\alpha+\beta} - \frac{B}{\alpha-\beta}\right\} = 0_{//}$$

第 6 問

[解] $y=-2x^2+x+1$ 上の $x=t$ における接線 l は

$$l: y=f(x)=(-4t+1)x+2t^2+1$$

である。l と $y=x^2$ の交点の x 座標は

$$x^2-(1-4t)x-2t^2-1=0 \quad \cdots ①$$

の2解で、①の判別式 D として

$$D=(1-4t)^2+4(2t^2+1)>0$$

から、①は必ず2異実解を持つので、これを α, β とすると $(\alpha<\beta)$ もとめる面積は

$$S=\int_\alpha^\beta \{-x^2+(1-4t)x+2t^2+1\}dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \quad \cdots ②$$

ここで、$\alpha<\beta$ 及び①から

$$\beta-\alpha=\sqrt{(1-4t)^2+4(2t^2+1)}=\sqrt{24t^2-8t+5}=\sqrt{24\left(t-\frac{4}{24}\right)^2+5-\frac{16}{24}}$$

で、これは $t=\frac{1}{6}$ で $\min\sqrt{\frac{13}{3}}$ をとるから、②もこの時 $\min S=\frac{1}{6}\frac{13}{3}\sqrt{\frac{13}{3}}=\frac{13}{18}\sqrt{\frac{13}{3}}$ をとる。