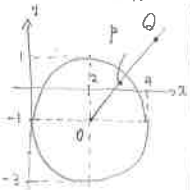
T. K. 大数学 1966

第 1 問



[解] 題意の円をCとおく。

$C:(x-2)^2+(y+1)^2=4$

から. $O(2,-1)$, $r=2$ である。そこで.

$\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \end{pmatrix}$

だから. $\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}$ $(k>0)$ とかけることより、

$|\overrightarrow{OP}|\cdot|\overrightarrow{OQ}|=k\{(x-2)^2+(y+1)^2\}=4$ (∵題意)

$O\neq P$ から

$k=\dfrac{4}{(x-2)^2+(y+1)^2}$

だから.

$\overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix} X-2 \\ Y+1 \end{pmatrix}=\dfrac{4}{(x-2)^2+(y+1)^2}\begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \end{pmatrix}$

である。成分を比較して

$$\begin{cases} X=\dfrac{4(x-2)}{(x-2)^2+(y+1)^2}+2 \\ Y=\dfrac{4(y+1)}{(x-2)^2+(y+1)^2}-1 \end{cases}$$

— (1)

(2) $x\in\mathbb{R}$, $y=0$ だから. (1)より

$$\begin{cases} X-2=\dfrac{4(x-2)}{(x-2)^2+1} \\ Y+1=\dfrac{4}{(x-2)^2+1} \end{cases}$$ …(*)

$Y\neq-1$ だから(第2式より)、第2式を変形して、

$(x-2)^2+1=\dfrac{4}{Y+1}$

第1式に代入して、

$X-2=(Y+1)(x-2)$

$\therefore\ x-2=\dfrac{X-2}{Y+1}$ $(\because Y\neq-1)$

だから. (*)に代入して

$Y+1=\dfrac{4}{\left(\dfrac{X-2}{Y+1}\right)^2+1}$

$\therefore\ (X-2)^2+(Y+1)^2=4(Y+1)$ $(\because Y\neq-1)$

$(X-2)^2+(Y-1)^2=4$ … ①

又. (*)及び $x\in\mathbb{R}$ から.

$0<Y+1\leq4$ $\therefore\ -1<Y\leq3$

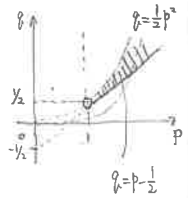
に注意して. $(X,Y)\neq(2,-1)$ である。以上から

$(X-2)^2+(Y-1)^2=4$ $((X,Y)=(2,-1)$ をのぞく$)$ —

第 2 問

[解] 判別式 D として $D>0 \Leftrightarrow p^2-2q>0$ …① である. 又収束する条件から

$$-1<\frac{\alpha}{2\beta}\leq 1,\quad -1<\frac{4\beta^2}{\alpha}\leq 1 \quad \cdots ②$$



ここで, ①∧$p>1$∧$1-2p+2q\geq 0$を図示すると右図斜線部(境界は実線のみ含む)だから, $p, q>0$となり

$$\alpha+\beta=p>0,\quad \alpha\beta=\frac{q}{2}>0 \quad \cdots ③$$

から $\alpha>0, \beta>0$ である. したがって. ②から

$$-2\beta<\alpha\leq 2\beta,\quad -\alpha<4\beta^2\leq\alpha$$

$$\therefore\ 0<\alpha\leq 2\beta,\quad 0<4\beta^2\leq\alpha$$

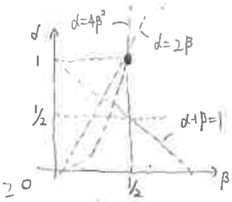
$$\therefore\ 4\beta^2\leq\alpha\leq 2\beta \quad \cdots ④$$

まず. αの存在条件から $4\beta^2\leq 2\beta$ ∴ $2\beta\leq 1$ ‥⑤が必要。$\alpha\leq\beta$の時④の左側が不成立だから $\beta\leq\alpha$が必要である。③を $p>1$, $1-2p+2q\geq 0$に代入して

$$1<\alpha+\beta,\quad 1-2(\alpha+\beta)+4\alpha\beta\geq 0 \quad \cdots ⑤$$

④,⑤を図示して. 右図黒丸の $(\alpha, \beta)=(1, \frac{1}{2})$を得る。

この時. ③から $(p, q)=(\frac{3}{2}, 1)$ である。



第 3 問

[解] $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $0<p$, $0<q$ ---①

$f(x)=\frac{1}{p}x^p-x+\frac{1}{q}$ とおく. $f'(x)=x^{p-1}-1$ である. ①から $1<p$ だから下表をうる.

x	0		1	
f'		$-$	0	$+$
f		$\searrow$	0	$\nearrow$

(①から $f(1)=0$)

したがって.

$$\begin{cases} x=1\text{の時} & x=\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q} \\ x\neq 1 \text{〃} & x<\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q} \end{cases}$$

第 4 問

[解] $f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=x^2+cx+d$とおく. 共通接線をl: $y=h(x)$とすると.

$$\begin{cases} f(x)-h(x)=(x-p)^2 \\ g(x)-h(x)=(x-q)^2 \end{cases} \quad \cdots ①$$

だから. 辺々引いて.

$$f(x)-g(x)=(x-p)^2-(x-q)^2=(2x-p-q)(q-p)$$

となり, $y=f(x)$と$y=g(x)$の交点のx座標は $x=\frac{p+q}{2}\equiv r$である。

したがって求める面積Sとして①から. $p<q$の時

$$S=\int_p^r (x-p)^2dx+\int_r^q (x-q)^2dx$$

$$=\frac{1}{12}(q-p)^3$$

$q<p$の時もかんがえて. $S=\frac{1}{12}|q-p|^3$ //

第 5 問

[解] $e(\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$ とおく。3数 a_1, a_2, a_3 に対し

$$a_k = r_k e(\theta_k) \quad (r_k, \theta_k \in \mathbb{R})$$

とする。$(k=1,2,3)$ まず $r_1=0$ とする。この時 $a_1 \neq a_2$, $a_1 \neq a_3$ から $r_2, r_3 > 0$ である。

題意から、

$$a_2 a_3 = 0, a_2, a_3$$

$$\therefore a_2 = 1 \text{ or } a_3 = 1 \qquad (\because a_1 = 0,\ 0 < a_2 \leq a_3)$$

となる。対称性から前者のみ考える。この時題意から、

$$a_3^2 = 0, 1, a_3$$

だが $a_1 \neq a_2$, $a_2 \neq a_3$, $a_3 \neq a_1$ をみたすのは $a_3=-1$ のみである。以上から、

$$(a_1, a_2, a_3) = (0, 1, -1)$$

が必要である。この3数は条件をみたし十分である。 … ①

次に、$r_k > 0$ とする。この時題意から $r_k = 1$ が必要である。さらに題意から、

$$a_1 a_2 = a_1, a_2, a_3 \quad \cdots (*)$$

となる。$a_1a_2=a_1$ or $a_1a_2=a_2$ の時 $a_1=1$ or $a_2=1$ となる。対称性から $a_1=1$ とする。
この時 $a_2 \neq 1$, $a_3 \neq 1$, $a_2 \neq a_3$ より、

$$a_2 a_3 = 1, \quad a_2^2 = a_3$$

となり $\{a_2, a_3\} = \{e(\tfrac{2}{3}\pi), e(\tfrac{4}{3}\pi)\}$ をえる。逆にこの時十分である。 … ②

最後に、$(*)$ において $a_1a_2=a_3$ の時。②の場合をのぞいて、$a_1 \neq 1, a_2 \neq 1, a_3 \neq 1$ として良い。
この時同様に

$$\begin{cases} a_2 a_3 = a_1 \\ a_3 a_1 = a_2 \end{cases} \quad \cdots (**)$$

をうるから、ふりかけて、$a_1a_2a_3 \neq 0$ から、両辺 $a_1a_2a_3$ でわって、

$$a_1 a_2 a_3 = 1$$

$a_1a_2=a_3$ から

$$a_3^2 = 1$$

$a_3 \neq 1$ から

$$a_3 = -1$$

$(**)$ から $a_2=-a_1$ となり $a_1a_2=a_3=-1$ とあわせて $a_1^2=1$ をうる。$a_1 \neq 1, a_3$ に反し矛盾。 … ③

以上①〜③より もとめる3数は

$$(0, 1, -1), \left(1, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

//

第 6 問

[解] $C=\cos x$, $S=\sin x$ とおく. $I=\int_0^\pi xSe^x dx$ とおく.

$$I=[xSe^x]_0^\pi-\int_0^\pi (S+xC)e^x dx = -\int_0^\pi Se^x dx-\int_0^\pi Cxe^x dx \quad \cdots①$$

$$\int_0^\pi Cxe^x dx = [Cxe^x]_0^\pi-\int_0^\pi (C-Sx)e^x dx$$

$$= -\pi e^\pi-\int_0^\pi Ce^x dx+I \quad \cdots②$$

$A=\int_0^\pi Se^x dx$, $B=\int_0^\pi Ce^x dx$ とおく。②を① に代入して

$$I = -A+\pi e^\pi+B-I$$

$$\therefore I=\frac{\pi e^\pi+B-A}{2} \quad \cdots③$$

ここで

$$A=\frac{1}{1+1}[e^x(S-C)]_0^\pi=\frac{1}{2}\{e^\pi+1\}$$

$$B=\frac{1}{1+1}[e^x(C+S)]_0^\pi=\frac{1}{2}(-e^\pi-1)$$

だから③に代入して

$$I=\frac{\pi e^\pi-e^\pi-1}{2}=\frac{(\pi-1)e^\pi-1}{2} \quad //$$

[解2]

$$I=[-Cxe^x]_0^\pi+\int_0^\pi Ce^x(x+1)dx=\pi e^\pi+B+\int_0^\pi Ce^x\cdot x\,dx$$

$$\int_0^\pi Ce^x\cdot x\,dx=[Se^x\cdot x]_0^\pi-\int_0^\pi Se^x(x+1)dx=-A-I$$

だから

$$I=\pi e^\pi+B-A-I$$

$$\therefore I=\frac{\pi e^\pi+B-A}{2}$$

(以下略)