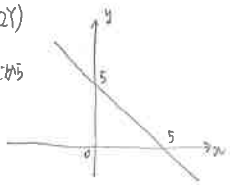
T. K. 大数学 1965

第 1 問

[解] $\ell: y=-x+5$ とおく．Bのℓに関する対称点 $C(2X+13, 2Y)$



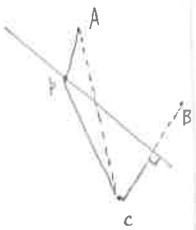
とおくと BCの中点 $M(X+13, Y)$ がℓ上にあり，かつ $BC\perp\ell$ だから

$$\begin{cases} Y=-(X+13)+5 \\ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=0 \end{cases} \Leftrightarrow X=Y=-4$$

だから $C(5,-8)$ である．右図から，Pが $\overline{AC}$ 上の時 $AP+PB$ はminで

この時 $AC: y=\frac{-15}{3}(x-2)+7=-5x+17$ だから Pは

$y=-5x+17$ と $y=-x+5$ の交点で $P(3,2)$ //



第 2 問

[解] $\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ \beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta=a \\ \alpha\beta\gamma=-b \end{cases}$ …①

である. ここで, $k=\alpha, \beta, \gamma$ に対し, $k^3+ak+b=0$ だから,

$$\begin{cases} k^4=k(-ak-b)=-ak^2-bk \\ k^5=k^2(-ak+b)=-ak^3-bk^2=-a(-ak-b)-bk^2=-bk^2+a^2k+ab \end{cases}$$

だから

$$at_5+bt_4=b(-at_2-bt_1)+a\{-bt_2+a^2t_1+3ab\}$$

$$=-2abt_2+(a^3-b^2)t_1+3a^2b \quad \cdots②$$

ここで,

$$t_2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)=-2a$$

$$t_1=0$$

だから ② に代入して

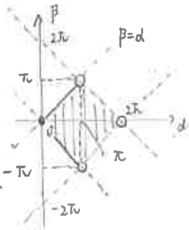
$$(与式)=4a^2b+0+3a^2b$$

$$=7a^2b$$

2a

[解] $0 \leq x < \pi,\ 0 \leq y < \pi$ …① $\alpha = x+y,\ \beta = x-y$ とおくと条件式から

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2} \quad \cdots②$$



$x = \frac{\alpha+\beta}{2},\ y = \frac{\alpha-\beta}{2}$ を①に代入して

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha+\beta < 2\pi \\ 0 \leq \alpha-\beta < 2\pi \end{cases} \quad \cdots③$$

③を図示すると右図で、この対称性及び $\cos(-\beta) = \cos\beta$ から、$\beta \geq 0$ で考えれば良い。この時

$$0 \leq \beta < \pi,\quad \beta \leq \alpha < -\beta + 2\pi \quad \cdots④$$

まず、$|\beta| \geq 0$ である。等号成立時、$0 \leq \alpha < 2\pi$ で $\alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$ とすれば②をみたす。

この時、$(x, y) = \left(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right), \left(\frac{5}{12}\pi, \frac{5}{12}\pi\right)$ である …⑤

次に、$|\beta|$ の最大値について考える。④の区間内では

$$\begin{cases} 0 \leq \beta \leq \pi/2 \text{ の時、} -1 \leq \sin\alpha \leq 1 & \cdots⑥ \\ \frac{\pi}{2} \leq \beta < \pi \text{ の時 } -\sin\beta < \sin\alpha \leq \sin\beta & \cdots⑦ \end{cases}$$

となる。⑥の時 $\cos\beta = \frac{1}{2}$ ∴ $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\alpha = \pi/2$ の時、$|\beta|$ は最大である。 …⑧

⑦の時、$\sin\alpha\cos\beta$ の値域は

$$\frac{1}{2}\sin 2\beta \leq \sin\alpha\cos\beta < -\frac{1}{2}\sin 2\beta$$

だから②から

$$\sin 2\beta \leq 1 < -\sin 2\beta$$

これをみたす β は存在しない。 …⑨

⑧⑨及び対称性から、$|\beta|$ が最大の時、$(\alpha, \beta) = \left(\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{3}\right)$ でこの時、

$(x, y) = \left(\frac{5}{12}\pi, \frac{1}{12}\pi\right), \left(\frac{1}{12}\pi, \frac{5}{12}\pi\right)$ である。 …⑩

⑤、⑩から、もとめるのは

$$(x, y) = \left(\frac{1}{12}\pi, \frac{1}{12}\pi\right)\ \left(\frac{5}{12}\pi, \frac{5}{12}\pi\right),\ \left(\frac{1}{12}\pi, \frac{5}{12}\pi\right),\ \left(\frac{5}{12}\pi, \frac{1}{12}\pi\right) \quad //$$

第 4 問

[解] シンプソンの公式から

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx = \frac{h-(-h)}{6}\{f(h)+f(-h)+4f(0)\}$$

だから.

$$\frac{1}{h}\int_{-h}^{h} f(x)dx = \frac{1}{3}\{f(h)+f(-h)+4f(0)\} \quad /\!/$$

第 5 問

[解] 題意から. $0\leq x\leq\pi$ に $\sin(x+h)=\sin x$ をみたすxが1つあるので. それをα とする.

つまり

$$\sin(\alpha+h)-\sin\alpha=0.\quad 0\leq\alpha\leq\pi \qquad \cdots ①$$

この時

$$\int_0^{\pi}|\sin(x+h)-\sin x|\,dx=\int_0^{\alpha}\{\sin(x+h)-\sin x\}dx-\int_{\alpha}^{\pi}\{\sin(x+h)-\sin x\}dx \cdots ②$$

$F(x)=\cos x-\cos(x+h)$ とおくと.

$$② = 2F(\alpha)-F(0)-F(\pi)=2F(\alpha)-(1-\cos h)-(-1+\cos h)$$

$$=2F(\alpha) \qquad \cdots ③$$

ここで ①及び $0<h<\pi$ から. $2\alpha+h=\pi$ $\therefore\ \alpha=\frac{\pi-h}{2}$ だから

$$F(\alpha)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{h}{2}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{h}{2}+h\right)=2\sin\frac{h}{2}$$

だから. ③から

$$\int_0^{\pi}|\sin(x+h)-\sin x|<4\sin\frac{h}{2}<2h \quad (\because 0<x \text{ の時 } \sin x<x)$$ ■

第 6 問

[解] 2接点 $P(\alpha, \alpha^2)$ $Q(\beta, \beta^2)$ とおく。$(\alpha<\beta)$. P,Qでの接線は

$$y=2\alpha x-\alpha^2,\quad y=2\beta-\beta^2$$

だから. この交点は $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha\beta\right)$ である. これが $(t, -1)$ に等しいので:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=2t \\ \alpha\beta=-1\end{cases} \quad \cdots ①$$

又. 題意の面積 $S(t)$ は

$$S(t)=\int_{\alpha}^{t}(x^2-2\alpha x+\alpha^2)dx+\int_{t}^{\beta}(x^2-2\beta x+\beta^2)dt$$

$$=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3 \quad \cdots ②$$

であり. ①から α. β は x の2次方程式 $x^2-2tx-1=0$ の2実解で. $\alpha<\beta$ とあわせて

$$\beta-\alpha=2\sqrt{t^2+1}$$

だから. ②とあわせて

$$\frac{S(t)}{\sqrt{t}}=\frac{1}{12}\frac{8(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{t}}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{(t^2+1)^3}{t}} \quad \cdots ③$$

$f(t)=\frac{(t^2+1)^3}{t}$ とおく. $p=t^{\frac{1}{3}}$ とすると $p>0$ で.

$$f(t)=\left(\frac{p^6+1}{p}\right)^3=\left(p^5+\frac{1}{p}\right)^3=\left(p^5+5\frac{1}{5p}\right)^3$$

$$\geqq\left(6\sqrt[6]{p^5\cdot\left(\frac{1}{5p}\right)^5}\right)^3=6^3\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{5}{2}} \quad (\because \text{AM-GM})$$

(等号成立は $p=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{6}}$ つまり $t=\sqrt{1/5}$ の時)

だから, ③に代入して.

$$\min\frac{S(t)}{\sqrt{t}}=\frac{2}{3}\sqrt{6^3\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{5}{2}}}=\frac{4}{5}\sqrt{\frac{6}{\sqrt{5}}}$$

//